ОПИСАНИЕ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

1. Область знаний: 1. Математика и механика
2. Тема научного исследования: Геометрические и топологические структуры на пространствах с действием тора
3. Характер научного исследования: Фундаментальный
4. Ключевые слова и словосочетания, характеризующие тематику научного исследования:
действия тора, торические многообразия, квазиторические многообразия,
момент-угол-комплексы, конфигурации подпространств, комплексные структуры, лагранжевы подмногообразия
5. Коды ГРНТИ, охватываемые научным исследованием:
27.19.17 - Топология. Алгебраическая топология
27.19.19 - Топология. Топология многообразий
6. Формулировка решаемой проблемы: Имеется обширный класс пространств и многообразий с действием тора и богатой комбинаторной структурой в пространстве орбит. По мере развития торической топологии на этих пространствах были открыты или построены важные геометрические и топологические структуры - комплексно-аналитических многообразий, лагранжевых подмногообразий, дополнений конфигураций подпространств и других конфигурационных пространств (с точностью до гомотопии). Изучению этих структур и их инвариантов и будет посвящён данный проект.

7. Цели научного исследования: Основной темой предлагаемого проекта является топологическая и геометрическая теория действий тора и её приложения в алгебраической топологии, комплексной и симплектической геометрии, а также исследование взаимосвязей с комбинаторной геометрией, коммутативной и гомологической алгеброй.

В рамках этих исследований сформировалась новая активно развивающаяся область, ставшая известной под названием Торическая Топология. В ней изучаются алгебраические, комбинаторные, дифференциальные и гомотопические аспекты класса действий тора, для которых пространство орбит несёт богатую комбинаторную структуру. Особенностью этой области является возможность описания геометрических и топологических инвариантов действия тора в терминах комбинаторики пространства орбит.

Торическая топология возникла как отдельный раздел около 12 лет назад в работах В.М.Бухштабера, М.Масуды, Н.Рэя, автора проекта и некоторых других математиков. Мотивирующую роль сыграли методы и конструкции теории торических многообразий в алгебраической геометрии и симплектических многообразий с гамильтоновым действием тора в симплектической геометрии. Торическая топология развивалась очень быстро, привлекла внимание большого числа специалистов из самых разных областей в России и за рубежом. Регулярно проводятся конференции и семинары, самые значительные из которых включают мероприятия в Москве (2004 г.), Осаке (Япония, 2006 г.), Манчестере (Великобритания, 2008 г.), Банффе (Канада, 2010 г.).

8. Задачи научного исследования: Исследования по торической топологии привели к большому количеству приложений в разных областях и открыли новые взаимосвязи между ними.

Мы выделили восемь основных направлений, краткое описание каждого из которых включает недавние достижения; дальнейшее развитие этих направлений и составляет задачи проекта.

1. Алгебраическая топология. Выработана принципиально новая точка зрения на классическую теорию комплексных кобордизмов. Найдены торические образующие кольца кобордизов и квазиторические представители во всех классах комплексных кобордизмов. Это открыло возможность построения чисто комбинаторно модели комплексных кобордизмов, в терминах выпуклых многогранников с некоторым набором дополнительных комбинаторных данных. В эквивариантном случае, приложение техники локализации и аналитических методов к эквивариантным рода Хирцебруха (торическим родам) квазиторических многообразий привело к значительным продвижениям в трудной проблеме вычисления эквивариантных колец кобордизмов.

2. Топология многообразий. Приложения торических методов основаны на ключевой конструкции момент-угол-комплексов Z_K, представляющих собой пространства с действием тора, параметризуемые конечными симплициальными комплексами K. В случае, когда K - триангуляция сферы, Z_K является топологическим многообразием, называемым момент-угол-многообразием. Триангуляции, двойственные к простым многогранникам P, предоставляют важный класс триангуляций сфер; соответствующие момент-угол-многообразия Z_P являются гладкими. Многообразия Z_P, соответствующие многогранникам Дельзанта, тесно связаны с конструкцией гамильтоновых торических многообразий при помощи симплектической редукции: Z_P возникает как множество уровня отображения моментов и вкладывается в C^m как невырожденное пересечение вещественных квадрик. Кольцо целочисленных когомологий
Z_K было описано Бухштабером и Пановым явно в терминах кольца граней (кольца Стенли-Райснера) симплициального комплекса K; позднее разными авторами были описаны явные гладкие и гомотопические типы некоторых конкретных семейств Z_K и Z_P. Тем не, топология пространств Z_K и многообразий Z_P даже для малых K и P остаётся в высшей степени таинственной, и требует выработки принципиально новых методов для её осмысления.

3. Теория конфигурационных пространств. Имеется тесная взаимосвязь между момент-угол-комплексами Z_K, дополнениями конфигураций координатных подпространтв (которые гомотопически эквиваленты Z_K) и ассоциированными конфигурационными пространствами. Тем самым открывается возможность изучать эти геометрические объекты топологическими методами. Эти исследования недавно получили замечательные приложения в планировании механических движений роботов (robotic motion planning).

4. Теория гомотопий. Недавно появившиеся обобщения момент-угол-комплексов и связанных с ними пространств - так называемые полиэдральные произведения - обогатили торическую топологию методами стабильной и нестабильной теории гомотопий и привели к дальнейшему прогрессу в понимании топологии торических пространств. Кроме того, категорные конструкции гомотопических копределов позволили получить явные гомотопически и гомологические разложения торических пространств.

5. Комбинаторая геометрия и комбинаторная коммутативная алгебра. Комбинаторная природа торических многообразий и момент-угол-комплексов вдохнула новую геометрическую жизнь в

задачи вычисления различных гомологических инвариантов колец граней и комбинаторных инвариантов комплексов Коэна-Маколея и Горенштейна. Эта область весьма активно развивается в настоящее время, и может быть существенно обогащена торическими и топологическими методами.

6. Комплексная геометрия. Многообразия, получаемые как пересечения квадрик, возникали в голоморфной динамике как пространства листов голоморфных слоений в C^m. Их изучение привело к открытию нового класса компактных некэлеровых комплексных многообразий в работах Лопеса де Медрано-Верховского и Мерсмана, ныне известных как LVM-многообразия. Как было недавно обнаружено, гладкие многообразия, соответствующие широкому классу LVM-многообразий, представляют собой в точности момент-угол-многообразия Z_P. Тем самым многообразия Z_P приобретают некэлеровы комплексные структуры, обобщающие известные семейства многообразий Хопфа и Калаби-Экмана. Накопленные топологические методы и результаты позволят сильно продвинуться в понимании геометрии и топологии этого широкого класса комплексных многообразий.

7. Симплектическая и лагранжева геометрия. Пересечения вещественных квадрик были отправной точкой в конструкции А.Миронова минимальных и гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в C^m. Так как те же пересечения квадрик приводят к момент-угол-многообразиям, наши результаты об их топологии открывают путь к построению минимальных лагранжевых подмногообразий с достаточно сложной топологией, а также к лучшему пониманию геометрии соответствующих лагранжевых вложений.

8. Риманова геометрия. Результаты о топологическом строении момент-угол-многообразий подсказывают, что на них должны существовать римановы метрики с существенными ограничениями на кривизну. Это уже было подтверждено в работах Дессаи (скалярная кривизна) и недавно в работах Базайкина, где было показано, что некоторые квазиторические и момент-угол-многообразия допускают инвариантные метрики положительной кривизны Риччи.

9. Методы решения задач научного исследования: Исследования по торической топологии используют как классические методы эквиваринатной топологии, алгебраической геометрии, комбинаторики и коммутативной алгебры, так и принципиально новые методы топологии многообразий (момент-угол-комплексы), комплексной геометрии (некэлеровы LVM-многообразия), симплектической и лагранжевой геометрии (построение минимальных лагранжевых подмногообразий с помощью пересечений квадрик).

10. Основное содержание научного исследования:

I. Введение в предмет исследования.

Первоначальный импульс развитию торической топологии развитию придала теория торических многообразий в алгебраической геометрии [Хов77], [Дан78]. Пространство орбит неособого проективного торического многообразия по действию компактного тора T^n представляет собой выпуклый простой многогранник P. Двойственный многогранник является симплициальным, а его граница является симплициальным комплексом K. Таким образом, пространство орбит действия тора несёт комбинаторную структуру, отражающую распределение стационарных подгрупп и позволяющую полностью восстановить многообразие и действие. Замечательно, что этот подход работает и в обратном направлении: в терминах топологических инвариантов пространства с действием тора удаётся интерпретировать и доказывать тонкие комбинаторные результаты топологически. Эта особенность алгебраических торических многообразий имеет чисто топологическую природу, что вызвало активное проникновение идей и методов торической геометрии в алгебраическую топологию с начала 1990-х годов.

Дальнейшие исследования выявили ряд классов T^n-многообразий, которые, не будучи алгебраическими, сохраняют важнейшие топологические свойства торических многообразий. Среди них - квазиторические многообразия Дэвиса-Янушкиевича [DJ91]. Этот класс многообразий определяется двумя условиями: действие тора локально выглядит как стандартное представление T^n в комплексном пространстве C^n, а пространство орбит Q является комбинаторным простым многогранником. (Оба условия выполнены для действия тора на неособом проективном торическом многообразии.)

Стенли был одним из первых, кто осознал полный потенциал этого направления для комбинаторных приложений, использовав его для доказательства гипотезы Макмюллена о числах граней симплициальных многогранников и гипотезы о верхней границе для триангуляций сфер. Его результаты и методы легли в основу известной монографии [St96] и предопределили дальнейшие приложения коммутативной алгебры и гомологических методов в комбинаторной геометрии.

Многие идеи Стенли находят и топологическое применение; в частности, кольцо граней (или кольцо Стенли-Райснера) Z[K] симплициального комплекса K является важной составляющей в вычислении кольца когомологий (квази)торического многообразия M. Исходное вычисление кольца H^*(M) в [DJ91] использовало некоторое вспомогательное T^m-пространство Z_K, сопоставляемое каждому комплексу K с m вершинами, а также гомотопическое факторпространство по действию тора (или конструкцию Бореля}) DJ(K). Происхождение пространства Z_K восходит к конструкции Винберга универсального пространства для групп отражений. Кольцо когомологий пространства DJ(K) (или эквивариантные когомологии многообразия M) изоморфно кольцу граней Z[K]. Кольцо обычных когомологий H^*(M) получается из Z[K] факторизацией по некоторым линейным формам, в точности как и для торических многообразий.

С появлением понятия кольца граней стало ясно, что многие тонкие комбинаторные свойства комплексов K можно интерпретировать алгебраически. Изучение колец граней получило самостоятельное развитие и привело к новому классу колец Коэна-Маколея, имеющих геометрическую природу. В частности, возникло новое топологическое понятие комплекса Коэна-Маколея, для которого Z[K] является кольцом Коэна-Маколея. Подробное изложение этих понятий можно найти в монографии [BH98], где также подчёркивается важность гомологического подхода. Например, в [St96] и [BH98] рассматриваются размерности биградуированных компонент векторных пространств Tor_{k[v_1,...,v_m]}(k[K],k), называемые алгебраическими числам Бетти кольца k[K], для любого поля k. Эти числа являются весьма тонкими инвариантами: они зависят от комбинаторной структуры K, а не только от топологии его реализации |K|, и полностью определяют "обычные" топологические числа Бетти пространства |K|.

Слияние топологических идей, восходящих к работе Дэвиса-Янушкевича [DJ91] и методов комбинаторной коммутативной алгебры Стенли предопределило изначальное развитие торической топологии в конце 1990-х годов. Момент-угол-комплексы Z_K, изначально возникшие в [DJ91] как вспомогательные пространства, со временем заняли центральное место в аппарате торической топологии [BP02], они также приобретают всё больший интерес в теории гомотопий (см. [GT07], [BBCG10]). Комплексы Z_K представляют собой пространства с действием тора, параметризуемые конечными симплициальными комплексами K. Благодаря их комбинаторному происхождению, момент-угол-комплексы находят приложения в комбинаторной геометрии и коммутативной алгебре.

В работе [БП99] Бухштабера и Панова пространство Z_K было описано как некоторый комплекс, построенный из полидисков и торов, а также как дополнение конфигурации координатных подпространств (с точностью до гомотопии). Эта конструкция момент-угол комплекса, а также её обобщение - полиэдральное произведение - в настоящее время находят обширные применения в теории гомотопий [BBCG10]. В случае, когда K является триангуляцией (симплициальным разбиением) сферы, Z_K является топологическим многообразием, называемым момент-угол-многообразием. Триангуляции, двойственные к простым многогранникам P, предоставляют важный класс триангуляций сфер; соответствующие момент-угол-многообразия являются гладкими [BP02] и обозначаются Z_P. Многообразия Z_P, соответствующие многогранникам Дельзанта, тесно связаны с конструкцией гамильтоновых торических многообразий при помощи симплектической редукции: Z_P возникает как множество уровня отображения моментов и, таким образом, вкладывается в C^m как невырожденное пересечение вещественных квадрик с рациональными коэффициентами [BP02]. Топология пространств Z_K и многообразий Z_P достаточно сложна даже для малых K и P. Кольцо когомологий Z_K было описано Бухштабером и Пановым [BP99] (см. также [Pa08]). Позднее разными авторами были описаны гомотопические и гладкие типы некоторых конкретных семейств Z_K и Z_P (см., например, [GT07] и [GL09]).

С другой стороны, многообразия, получаемые как пересечения квадрик, возникали в голоморфной динамике как пространства листов голоморфных слоений в C^m. Их изучение привело к открытию нового класса компактных некэлеровых комплексных многообразий в работах Лопеса де Медрано-Верховского [LV97] и Мерсмана [Me00], ныне известных как LVM-многообразия. Как было обнаружено Босио и Мерсманом [BM06], гладкие многообразия, соответствующие широкому классу LVM-многообразий, представляют собой в точности момент-угол-многообразия Z_P. Тем самым многообразия Z_P приобретают некэлеровы комплексные структуры, обобщающие известные семейства многообразий Хопфа и Калаби-Экманна. В тоже время в работе А.Миронова [Мир04] полные пересечения вещественных квадрик, приводящие к момент-угол-многообразиям Z_P, были использованы для построения новых примеров минимальных и гамильтоново-минимальных лагранжевых подмногообразий в C^m и CP^m. Эти лагранжевы подмногообразия содержатся в качестве подмногообразий в Z_P\subset C^m, а также являются тотальными пространствами главных расслоений со слоем тор над вещественными аналогами момент-угол-многообразий. Данные взаимосвязи открывают новые возможности приложений торической топологии и, в частности, теории момент-угол-многообразий в комплексной и лагранжевой геометрии.

II. Предыдущие исследования (научный задел).
Ранние исследования Панова связаны с теорией кобордизмов многообразий с действием конечных групп, в рамках топологической теории "гладких периодических отображений", восходящей к работам Коннера-Флойда [CF64] и Бухштабера-Новикова [БН71]. По результатом исследований были опубликованы работы [Пан97], [Пан98], [Пан98']. В них были получены явные формулы для

вычисления родов Хирцебруха многообразий с действием группы Z/p в терминах весов действия в неподвижных точках. Также была получена классификация с точностью до кобордизма многообразий, допускающих действие Z/p с изолированными неподвижными точками или неподвижными подмногообразиями с тривиальным нормальным расслоением, в терминах характеристичеких чисел и в терминах коэффициентов универсальной формальной группы. Это дало ответ на вопрос, стоявший с 1971 г. [БН71]. Данные результаты составили основу кандидатской диссертации Т.Панова, защищённой в 1999 г.

С 1998 г. Т. Панов занимается исследованиями по торической топологии, введение в которые дано в предыдущем разделе. Изложению результатов о квазиторических многообразиях и момент-угол-комплексах, их роли в торической топологии и приложениям в комбинаторной геометрии и гомологической алгебре посвящена монография Бухштабера и Панова [BP02] (изд-во Американского Математического Общества, 2002 г.). В 2004 году появилось её существенно расширенное русское издание [БП04] (изд-во МЦНМО, Москва). В 2004-2010 годах многие результаты получили дальнейшее развитие в работах Панова и совместных работах с отечественными и зарубежными коллегами. На основе этих результатов в 2009 г. Пановым была защищена докторская диссертация на тему "Топология и комбинаторика действий торов". Выделим следующие направления исследований Панова и результаты, имеющие наибольшее отношение к проекту.

1. Кобордизмы торических и квазиторических многообразий.
Работы Бухштабера-Рэя показали [BR01], что квазиторические многообразия играют важную роль в теории комплексных кобордизмов - классической области алгебраической топологии. В отличие от торических многообразий, квазиторические многообразия могут не быть комплексными, однако они всегда допускают стабильно комплексную структуру, и их классы кобордизмов порождают всё кольцо комплексных кобордизмов. Стабильно комплексная структура на квазиторическом многообразии определяется в комбинаторных терминах - при помощи характеристической функции, которая обобщает понятие веера, сопоставляемого торическому многообразию. В работе Панова [Пан01] получены эффективные комбинаторные формулы, вычисляющие ряд важных родов Хирцебруха квазиторических многообразий в терминах комбинаторных данных. В этой же работе [Пан01] впервые возникло понятие знака неподвижной точки действия тора, сохраняющего стабильно комплексную структуру. Комбинаторные формулы из [Пан01] приобретают особенно простой вида для старшего числа Чженя c_n (доказано, что c_n[M] равно сумме знаков неподвижных точек действия тора на M) и рода Тодда (доказано, что td[M] равен сумме знаков неподвижных точек индекса 0). В случае торического многообразия все знаки положительны, а неподвижная точка индекса 0 единственна; тем самым получаются известные результаты об эйлеровой характеристике и роде Тодда торического многообразия.

В работе Бухштабера, Панова и Рэя [BPR07] доказано, что в каждом классе комплексных кобордизмов содержится квазиторическое многообразие, т.е. каждое стабильно комплексное многообразие кобордантно многообразию с действием тора с регулярными свойствами. Данный результат можно сформулировать и в терминах характеристических чисел: любой набор чисел Чженя стабильно комплексного многообразия реализуется в виде чисел Чженя квазиторического многообразия. Из результатов [BR01] было известно, что стандартный набор аддитивный образующих кольца комплексных кобордизмов, состоящий из гиперповерхностей Милнора H_{ij} (которые не являются квазиторическими) можно заменить на набор торических образующих B_{ij}. Тем самым каждый класс кобордизма представляется несвязным объединением торических многообразий. Вклад Панова, в частности, состоял в построении операции, заменяющей обычную эквивариантную связную сумму, что потребовало весьма тонкого анализа стабильно комплексных структур и инвариантов действия тора в неподвижных точках. В результате несвязное объединение было заменено на (связное) квазиторическое многообразие.

Результат о представимости классов кобордизма квазиторическими многообразиями можно рассматривать как торический аналог известной проблемы Хирцебруха о представимости классов комплексных кобордизмов связным неособыми алгебраическими многообразиями. В [BPR07] квазиторический представитель в каждом классе кобордизма строится явно как факторпространство полного пересечения вещественных квадрик (момент-угол-многообразия Z_P) по свободному действию тора. При описании эквивариантного оснащения вложения $Z_P\subset C^m$ и соответствующей стабильно комплексной структуры на факторпространтстве - квазиторическом многообразии - используется пространство аналогичных многогранников, описанное в работах Александрова и Пухликова-Хованского [ПХ92], что подчёркивает комбинаторную природу данного результата о комплексных кобордизмах.

В работе [BPR10] развита теория эквивариантных родов стабильно комплексных многообразий с действием тора. Введено понятие универсального торического рода Ф, который представляет собой гомоморфизм из T^k-эквивариантных комплексных кобордизмов $\Omega^*_{U:T^k}$ в комплексные кобордизмы $\Omega^*_U(BT^k)$ классифицирующего пространства. В случае изолированных неподвижных точек получены универсальные локализационные формулы для универсального рода и других известных эквивариантных родов Хирцебруха (сигнатуры, рода Тодда, эллиптических родов). Для квазиторических многообразий полученны формулы для родов, зависящие лишь от комбинаторных данных. Доказано, что обобщённый эллиптический род Кричевера (частным случаем которого является эллиптический род Ошанина-Виттена) обращается в нуль на квазиторических SU-многообразиях (т.е. с нулевым первым классом Чженя).

2. Геометрия и топология момент-угол-многообразий и комплексов.

В работах [БП99], [BP02], [Pa08] описано кольцо когомологий момент-угол комплекса Z_K. Этот результат был ключевым для понимания топологической структуры Z_K, нашёл приложения и получил дальнейшее развитие в комбинаторной геометрии и теории гомотопий. Доказан изоморфизм алгебры когомологий $H^*(Z_K)$ и Tor-алгебры $\mathrm{Tor}_{Z[v_1,...,v_m]}(Z[K],Z)$, где $Z[K]$ - кольцо граней. При этом показано, что каноническая биградуировка в Tor имеет явную геометрическую реализацию, обусловленную введённой в Z_K биградуированной клеточной структурой. Тем самым алгебраические числа Бетти кольца граней симплициального комплекса или простого многогранника - важнейшие инварианты комбинаторной структуры - получили геометрическую интерпретацию.

Область приложения результата о когомологиях Z_K оказалась широкой благодаря тому, что момент-угол-комплексы Z_K имеют различные, на первый взгляд не связанные между собой, реализации (часть из которых описана в разделе I). В каждом случае получается решение известной задачи об описании соответствующего кольца когомологий. Так, в [BP02] доказано, что Z_K является деформационным ретрактом дополнения U(K) конфигурации комплексных координатных подпространств, соответствующей K. Конфигурации подпространств возникают в самых различных областях геометрии, и изучение топологии их дополнения представляет собой важную и трудную задачу [Bac97], [GM88]. Теорема Бухштабера-Панова о момент-угол-комплексах даёт исчерпывающее глобальное описание кольца когомологий дополнения конфигурации координатных подпространств.

Работа [PU10] посвящена развитию недавно открытых взаимосвязей между торической топологией и комплексной геометрией. Доказано, что момент-угол-многообразия Z_K, соответствующие полным симплициальным веерам (т.е. для которых K имеет звёздчатую реализацию) допускают некэлеровы комплексно-аналитические структуры. В качестве частных случаев получаются известные семейства многообразий Хопфа и Калаби-Экманна. Дано описание групп когомологий Дольбо комплексных структур на Z_K и явно вычислен ряд чисел Ходжа в малых размерностях. Это вычисление основано на применении спектральной последовательности Бореля к голоморфным главным расслоениям Z_K над торическими многообразиями.

3. Гомотопические аспекты торической топологии.
В [PRV04], [PR08] доказано, что функторы классифицирующего пространства и пространства петель коммутируют с функтором гомотопического прямого предела (с классическим функтором прямого предела они не коммутируют). Получены алгебраические и топологические модели пространств петель ΩZ_K на момент-угол-комплексах в виде гомотопических копределов диаграмм торов в категории топологических групп и диаграмм внешних алгебр в категории некоммутативных дифференциальных градуированных алгебр. Данное гомотопическое разложение в ряде случаев привело к эффективному вычислению колец гомологий Понтрягина $H_*(\Omega Z_K;Q)$ и $H_*(\Omega DJ(K);Q)$, а также (на основе кобар-конструкции Адамса) к вычислению алгебры Йонеды $\mathrm{Ext}_{Q[K]}(Q,Q)$ кольца граней над Q. В случае флаговых комплексов K алгебра Q[K] является квадратичной и кошулевой; тем самым наше вычисление даёт новую топологическую интерпретацию квадратичной двойственности для данного класса алгебр.

4. Другие исследования.
В работах [MMP07], [MP06], [МП08], [LP09] построена гомологическая теория общих локально стандартных действий тора T^n на 2n-мерных многообразиях с приложениями в комбинаторике симплициальных частично упорядоченных множеств. В [CPS10] исследована когомологическая жёсткость простых многогранников. В [Пан08] дано описание момент-угол-комплексов в рамках геометрической теории инвариантов: доказано, что Z_K является компактным множеством типа Кемпфа-Несс для действия алгебраического тора на квазиаффинных многообразиях.

III. Будущие исследования.
В рамках проекта планируется продолжить исследования по топологии момент-угол-многообразий, как одного из наиболее важных классов многообразий с действием тора, изучаемых в торической топологии. Кроме того, ввиду недавнего открытия новых геометрических аспектов этой теории, планируются исследования по комплексной и лагранжевой геометрии многообразий Z_K. Топология момент-угол-многообразий в настоящий момент находится в центре исследования нескольких групп учёных [GT07], [BBCG10], [GL09], во многом благодаря более ранним результатам автора в этом направлении. В то же время геометрия момент-угол многообразий представляется совершенно новой областью исследований. Среди конкретных ожидаемых результатов выделим следующие.

1. Топология.

Использовать методы нестабильной теории гомотопий (высшие произведения Уайтхеда и Самельсона, гомотопические копределы) для описания топологического и гомотопического типа момент-угол-комплексов и многообразий. Явное описание кольца когомологий Z_K, полученное в [BP02], позволяет в ряде случаев сформулировать гипотезы о гомотопическом и топологическом строении этих пространств. Такие гипотезы можно далее доказать, построив гомотопическую эквивалентность, реализующую данный изоморфизм когомологий, путём реализации классов гомологий из $H_*(Z_K)$ высшими скобками Уайтхеда. Этот подход (с использованием лишь обычных скобок Уайтхеда) уже был достаточно эффективно реализован в [GT07] и [PR08] для описания гомотопического типа Z_K и пространства петель ΩZ_K в случае, когда K является флаговым комплексом или остовом симплекса. Однако данные классы весьма ограничены. Используя высшие скобки и гомотопические копределы планируется описать топологическое строение момент-угол-комплексов Z_K, не являющихся букетами сфер или связными суммами произведений сфер, и в частности, описать топологический тип неформальных многообразий Z_K. Описание топологии Z_K представляется весьма важным для последующих геометрических приложений.

2. Комплексная геометрия.

Исследовать инварианты некэлеровых комплексных структур на момент-угол многообразиях Z_K. Описать мультипликативную структуру (умножение) в когомологиях Дольбо $H^{*,*}_{\bar\partial}(Z_K)$, вычислить числа Ходжа, определить какие числа Ходжа являются комбинаторными инвариантами K, а какие зависят от выбора комплексной структуры на Z_K. Ряд результатов в этом направлении (аддитивное описание когомологий Дольбо, вычисление чисел Ходжа в малых размерностях) уже получен в [PU10]. Сопоставление вычисления кольца когомологий Z_K из [BP02] с вычислением кольца когомологий Дольбо на основе спектральной последовательности в когомологиях Дольбо, сходящейся с обычным когомологиям, приведёт к новому пониманию соотношений между геометрическими и топологическими структурами на Z_K, а также, как ожидается, к новым приложениями в комбинаторике симплициальных разбиений сфер.

3. Лагранжева геометрия.

В работе [Мир04] был описан новый широкий класс лагранжевых минимальных и гамильтоново минимальных подмногообразий N в C^m. Данные подмногообразия оказались тесно связанными с момент-угол-многообразиями Z_P, представляющими собой полные пересечения квадрик, а также их вещественными аналогами R_P. А именно, лагранжево подмногообразие N лежит в Z_P, расслаивается над тором T^{m-n} со слоем R_P, и в то же время расслаивается над вещественным аналогом квазиторического многообразия (так называемым малым накрытием) со слоем тор. Таким образом, ожидается, что результаты Панова о топологии пересечений квадрик, момент-угол-многообразий и квазиторических многообразий позволят описать топологию данных подмногообразий N и геометрию их лагранжевых вложений. В частности, планируется построить минимальные лагранжевы подмногообразия со сложной, но эффективно описываемой топологической структурой, происходящей из топологии Z_P.

IV. Список цитированной литературы.

[БН71]
В.М. Бухштабер, С.П. Новиков. Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса. Матем. сборник 84 (1971), 81-118.

[БП99]
В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Действия тора и комбинаторика многогранников. Труды Матем. Инст. им. В.А.Стеклова, т.225 (1999), стр.96-131; arXiv:math.AT/9909166.

[БП00]
В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Действия тора, комбинаторная топология и гомологическая алгебра. Успехи Мат. Наук 55 (2000), вып.5, стр.3-106; arXiv:math.AT/0010073.

[БП04]
В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. Издательство МЦНМО, Москва, 2004 (272 стр.).

[Вас97]
В.А.Васильев. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.

[Дан78]
В.И.Данилов. Геометрия торических многообразий. Успехи мат. наук 33 (1978), вып.2, стр.85-134.

[МП08]
М.Масуда, Т.Е.Панов. Полусвободные действия окружности, башни Ботта и квазиторические многообразия. Матем. Сборник 199 (2008), вып.8, стр. 95-122; arXiv:math.AT/0607094.

[Мир04]
А.Е.Миронов. О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в C^n и CP^n. Матем. сборник 195 (2004), вып.1, стр.89-102.

[Пан97]
Т.Е.Панов. Эллиптический род для многообразий с действием группы Z/p. Успехи Мат. Наук 52 (1997), вып.2, стр.181-182.

[Пан98]
Т.Е.Панов. Классификация с точностью до кобордизма многообразий, несущих простое действие группы Z/p. Мат. Заметки 63 (1998), вып.2, стр.260-268; arXiv:math.AT/9908166.

[Пан98']
Т.Е.Панов. Вычисление родов Хирцебруха многообразий, несущих действие группы Z/p через инварианты действия. Известия РАН, сер. матем. 62 (1998), вып.3, стр.87-120; arXiv:math.AT/9909081.

[Пан01]
Т.Е.Панов. Роды Хирцебруха многообразий с действием тора. Известия РАН, сер. матем. 65 (2001), вып.3, стр.123-138.

[Пан08]
Т.Е.Панов. Торические множества типа Кемпфа-Несс. Труды Матем. Инст. им. В.А.Стеклова, т. 263 (2008), 159-172; arXiv:math.AG/0603556.

[ПХ92]
А.В.Пухликов, А.Г.Хованский. Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников. Алгебра и анализ 4 (1992), вып.2, стр.161-185.

[Хов77]
А.Г.Хованский. Многогранники Ньютона и торические многообразия. Функц. анализ и его прил. 11 (1977), вып. 4, стр.56-64.

[BBCG10]
A.Bahri, M.Bendersky, F.Cohen, S.Gitler.
The polyhedral product functor: a method of computation for moment-angle complexes, arrangements and related spaces. Advances in Math. 225 (2010), no.3, 1634-1668.

[Bo66]
Armand Borel. A spectral sequence for complex-analytic bundles, Appendix Two in: F.Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin--Heidelberg, 1966.

[BM06]
F.Bosio, L.Meersseman. Real quadrics in C^n, complex manifolds and convex polytopes. Acta Math. 197 (2006), no.1, 53-127.

[BH98]
W.Bruns, J.Herzog. Cohen-Macaulay Rings, revised edition. Cambridge Studies in Adv. Math., vol.39, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[BR01]
V.M.Buchstaber, N.Ray. Tangential structures on toric manifolds, and connected sums of polytopes. Internat. Math. Res. Notices 4 (2001), 193-219.

[BP00]
V.M.Buchstaber, T.E.Panov. Torus actions determined by simple polytopes, in: ``Geometry and Topology: Aarhus" (K.Grove, I.H.Madsen, and E.K.Pedersen, eds.). Contemporary Math., vol.258, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp.33-46.

[BP02]
V.M.Buchstaber, T.E.Panov. Torus actions and their applications in topology and combinatorics. University Lecture Series, vol.24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002 (152 pages).

[BPR07]
V.M.Buchstaber, T.E.Panov, N.Ray. Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds. Moscow Math. J. 7 (2007), no.2, 219-242; arXiv:math.AT/0609346.

[BPR10]
V.M.Buchstaber, T.E.Panov, N.Ray. Toric genera. Internat. Math. Research Notices 16 (2010), 3207-3262; arXiv:0908.3298.

[CPS10]
Suyoung Choi, Taras Panov and Dong Youp Suh. Toric cohomological rigidity of simple convex polytopes. J. Lond. Math. Soc., II Ser. 82 (2010), no.2, 343-360; arXiv:0807.4800.

[CF64]
Pierre E. Conner and Edwin E. Floyd. Differentiable periodic maps. Springer-Verlag, Berlin, 1964. [Русский перевод: П.Коннер, Э.Флойд, Гладкие периодические отображения, М.: Мир, 1969.]

[DJ91]
Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J. 62 (1991), no.2, 417-451.

[GL09]
S.Gitler, S.Lopez de Medrano. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums. Preprint (2009); arXiv:0901.2580.

[GM88]
Mark Goresky and Robert MacPherson, Stratified Morse Theory. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988. [Русский перевод: М.Горески, Р.Макферсон, Стратифицированная теория Морса, М.: Мир, 1991.]

[GT07]
J.Grbic, S.Theriault. The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement. Topology 46 (2007), no.4, 357-396; arXiv:math/0601279.

[LV97]
S.Lopez de Medrano, A.Verjovsky. A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds. Bol. Soc. Mat. Brasil. 28 (1997), 253-269.

[LP09]
Zhi Lu and Taras Panov. Moment-angle complexes from simplicial posets. Submitted preprint (2009); arXiv:0912.2219.

[MMP07]
Hiroshi Maeda, Mikiya Masuda and Taras Panov. Torus graphs and simplicial posets. Advances in Math.

212 (2007), no.2, 458-483; arXiv:math.AT/0511582.

[MP06]
M.Masuda, T.Panov. On the cohomology of torus manifolds. Osaka J. Math. 43 (2006), 711-746; arXiv:math.AT/0306100.

[Me00]
L.Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. Math. Ann. 317 (2000), 79-115.

[Pa08]
Taras Panov. Cohomology of face rings, and torus actions, in ``Surveys in Contemporary Mathematics''. London Math. Soc. Lecture Note Series, vol.347, Cambridge, U.K., 2008, pp.165-201; arXiv:math.AT/0506526.

[Pa10]
Taras Panov. Moment-angle manifolds and complexes. Trends in Mathematics - New Series. Information Center for Mathematical Sciences, KAIST. Vol.12 (2010), no.1, pp.43-69; arXiv:1008.5047.

[PR08]
Taras Panov and Nigel Ray. Categorical aspects of toric topology, in: ``Toric Topology'' (M.Harada et al, eds.). Contemp. Math., vol.460, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp.293-322; arXiv:0707.0300.

[PRV04]
Taras Panov, Nigel Ray and Rainer Vogt. Colimits, Stanley-Reiner algebras, and loop spaces. Progress in Math., vol.215, Birkhauser, Basel, 2004, p.261-291; arXiv:math.AT/0202081.

[PU10]
Taras Panov and Yuri Ustinovsky. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds. Submitted preprint (2010); arXiv:1008.4764.

[St96]
Richard P. Stanley. Combinatorics and Commutative Algebra, second edition. Progress in Math. 41, Birkhauser, Boston, 1996.

V. Признание заслуг.
В 2004 г. Т.Е.Панов стал лауреатом премии Московского Математического Общества для молодых ученых за цикл работ "Инварианты многообразий с действиями групп". В 2004 г. Т.Е.Панов получил премию Международной академической издательской компании "Наука/Интерпериодика" за лучшую публикацию в издаваемых ею журналах. (Премия получена за публикацию В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Комбинаторика симплициально клеточных комплексов и торические действия. Труды Матем. Инст. им. В.А.Стеклова, т. 247 (2004), стр.41-58.) В 2006 г. Т.Е.Панов стал победителем Конкурса Пьера Делиня для молодых учёных Белоруссии, России и Украины. В 2009 г. стал победителем Конкурса на присуждение грантов поддержки талантливых молодых ученых МГУ.

11. Новизна научного исследования: Как уже отмечалось в разделе "Цели и задачи научного исследования", результаты автора проекта (совместно с В.М.Бухштабером, М.Масудой, Н.Рэем) стоят у истоков нового направления исследований - Торической Топологии - которое весьма активно развивается более 10 лет и привлекает всё большее число специалистов из разных областей.

Все результаты автора, описанные в разделе "Основное содержание" являются абсолютно новыми, а планируемые результаты позволят решать принципиально новые задачи по восьми направлениям, описанным в разделе "Задачи научного исследования".

12. Ожидаемые результаты научного исследования: Ожидается получение новых результатов о топологии момент-угол-комплексов и многообразий как геометрическими, так и гомотопическими методами, описание новых инвариантов геометрических структур на пространствах с действием тора - комплексных структур, структур лагранжевых подмногообразий, метрик положительной кривизны. Более подробно планируемые результаты описаны в подразделе "Будущие исследования" раздела "Основное содержание".

13. Основные направления дальнейшего использования предполагаемых результатов:
Торические пространства и ассоциированные с ними объекты не только представляют интерес с топологической точки зрения, но и связывают воедино направления исследований, описанные в разделе "задачи научного исследования" (алгебраическая топология, топология многообразий, теория конфигурационных пространств, теория гомотопий, комбинаторная геометрия, комплексная геометрия, симплектическая и лагранже геометрия, риманова геометрия). Любое существенное продвижение в понимании топологии торических пространств сразу приведёт к обширным приложениям в этих областях.

Упомянутые в направлении 3 (конфигурационные пространства) недавно найденные приложения в планировании механических движений роботов, возможно, откроют возможности для разработки новых технологий создания систем управления.

14. Приоритетные направления развития науки, технологий и техники Российской Федерации, развитию которых способствуют результаты научного исследования:
Транспортные, авиационные и космические системы
15. Критические технологии Российской Федерации, в которых возможно использование результатов научного исследования: Технологии создания интеллектуальных систем навигации и управления

Соискатель гранта ________________________________/Панов Т. Е./