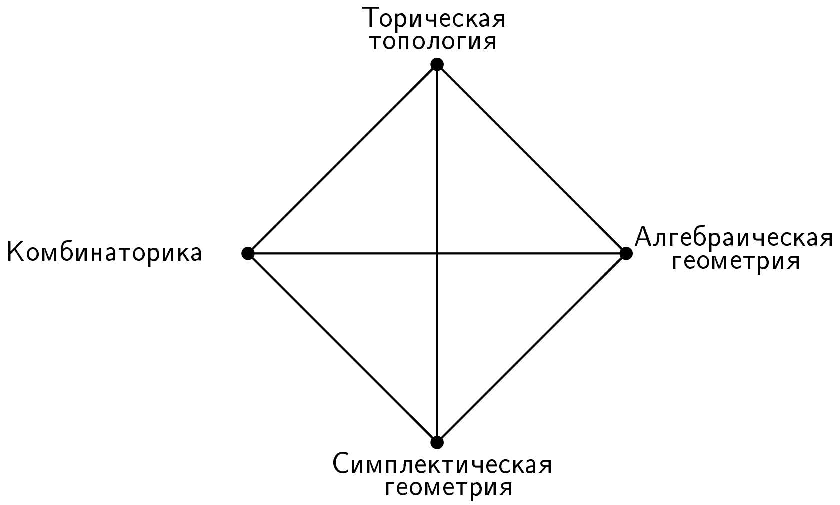
Торические действия в топологии и комбинаторике

В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин, Т. Е. Панов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Москва, 15 марта 2012 г.

«Торический тетраэдр»



1. Комбинаторика.

$\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \ldots, m\}$ (набор подмножеств в $[m]$, замкнутый относительно включения).

$I = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}$ – симплекс (или грань) размерности $k - 1$.
Всегда $\varnothing \in \mathcal{K}$.

$f_i = f_i(\mathcal{K})$ – число граней (симплексов) размерности i.
Пусть $\dim \mathcal{K} = n - 1$.

$\boldsymbol{f}(\mathcal{K}) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ – f-вектор. $f_0 = m$.
h-вектор $\boldsymbol{h}(\mathcal{K}) = (h_0, h_1 \ldots, h_n)$ определяется из соотношения

$$h_0 t^n + h_1 t^{n-1} + \cdots + h_n = (t-1)^n + f_0 (t-1)^{n-1} + \cdots + f_{n-1}.$$

$\mathcal{K}$ – триангуляция сферы, если $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$.
Пример: граница вып. n-мерного симплициального многогранника.

Ограничения на числа граней

Вопрос: как охарактеризовать f-векторы (или h-векторы) для интересных классов симплициальных комплексов (например, многогранников, триангуляций сфер или триангуляций многообразий)?

Примеры ограничений на $\boldsymbol{f}(\mathcal{K})$:

$f_0 - f_1 + \ldots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = \chi(\mathcal{K}) \iff h_n - h_0 = \chi(\mathcal{K}) - \chi(S^{n-1})$;

$2f_{n-2} = nf_{n-1}$, если $\mathcal{K}$ – триангуляция сферы или многообразия;

$h_i = h_{n-i}$, если $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$ (соотношения Дена–Соммервилля);

$f_1 \leqslant C^2_{f_0}$;

$f_0 \geqslant n + 1 \iff h_0 \leqslant h_1$, если $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$;

$f_1 \geqslant nf_0 - C^2_{n+1} \iff h_1 \leqslant h_2$, если $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$.

Теорема (Биллера–Ли, Стенли, 1980)

Следующие условия необходимы и достаточны для того, чтобы набор $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})$ *был* f*-вектором симплициального многогранника:*

а) $h_i = h_{n-i}$ *при* $i = 0, \ldots, n$;

б) $h_0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant \ldots \leqslant h_{[n/2]}$;

в) $\ldots$ *(ограничение на рост* h_i*).*

При доказательстве многограннику P сопоставляется проективное торическое многообразие X_P, для когомологий которого имеем

$$\dim H^{2i}(X_P, \mathbb{Q}) = h_i(P).$$

Тогда а) вытекает из двойственности Пуанкаре, а б) и в) – из сильной теоремы Лефшеца для проективных многообразий.

Проблема (гипотеза Макмюллена)

Верно ли, что те же условия а)–в) характеризуют f-векторы триангуляций сфер?

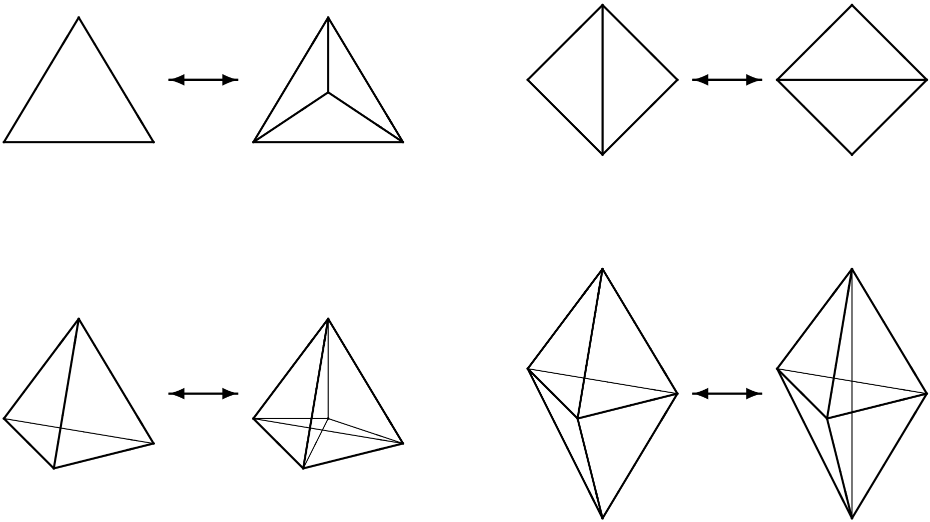
Как получать триангуляции, не происходящие из многогранников?

Имеются классические примеры:

- сфера Барнетта и сфера Брюкнера в размерности 3;
- двойная надстройка над сферой Пуанкаре в размерности 5.

Для построения новых примеров можно использовать операции надстройки, соединения (джойна) и бизвёздные преобразования (флипы).

Бизвёздные преобразования в размерности 2 и 3



Теорема (Пахнер)

Две триангуляции многообразия кусочно-линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда одну из них можно перевести в другую последовательностью бизвёздных преобразований.

Таким образом, начав с не кусочно-линейной триангуляции сферы (например, с двойной надстройки над сферой Пуанкаре) и применяя к ней бизвёздные преобразования, мы никогда не получим выпуклого многогранника.

Поведение h-вектора при бизвёздных преобразованиях легко контролируемо. Имеются компьютерные программы (*Bistellar*), выполняющие эту процедуру.

Однако контрпримеров к гипотезе Макмюллена на этом пути пока получено не было...

Рассмотрим единичный полидиск в $\mathbb{C}^m$:

$$\mathbb{D}^m = \bigl\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_i| \leqslant 1\bigr\}.$$

Для каждого $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ положим

$$B_I := \bigl\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{D}^m \colon |z_j| = 1 \text{ при } j \notin I\bigr\}.$$

Определим момент-угол-комплекс

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I \subset \mathbb{D}^m$$

Это – инвариантное подмножество относительно покоординатного действия стандартного тора

$$\mathbb{T}^m = \bigl\{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_i| = 1, \quad i = 1, \ldots, m\bigr\}.$$

Для пары пространств $W \subset X$ и $I \subset [m]$ положим

$$(X, W)^I = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \colon x_j \in W \text{ при } j \notin I\} \cong \prod_{i \in I} X \times \prod_{i \notin I} W,$$

и определим полиэдральное произведение пары (X, W):

$$(X, W)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, W)^I \subset X^m.$$

Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{D}, \mathbb{S})^{\mathcal{K}}$, где $\mathbb{S}$ – единичная окружность.

Другой пример: дополнение набора координатных подпространств

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z \in \mathbb{C}^m \colon z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = 0\} =$$

$$= (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \Big(\prod_{i \in I} \mathbb{C} \times \prod_{i \notin I} \mathbb{C}^\times\Big),$$

где $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Очевидно, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{K})$.

Теорема (Бухштабер–Панов)

а) Имеется деформационная ретракция $U(\mathcal{K}) \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$;

б) пусть $|\mathcal{K}| \cong S^{n-1}$. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является многообразием.

3. Комбинаторная коммутативная алгебра.

$\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$.
Кольцо граней (кольцо Стенли–Райснера):

$$\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m] \big/ \big(v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}\big), \qquad \deg v_i = 2.$$

Теорема (Бухштабер–Панов)

Имеет место изоморфизм (би)градуированных алгебр

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbb{Z}[\mathcal{K}], \mathbb{Z}\big).$$

Следствие

Если $\mathcal{K}$ – триангуляция $(n-1)$-мерного многообразия, то из двойственности Пуанкаре для $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ вытекают соотношения

$$h_{n-i} - h_i = (-1)^i \big(\chi(\mathcal{K}) - \chi(S^{n-1})\big)\, C_n^i$$

(обобщённые соотношения Дена–Соммервилля).

Размерности биградуированных компонент Tor-групп

$$\beta^{-i,2j}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}]) := \dim \operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}],\mathbb{Z})$$

являются весьма тонкими комбинаторными инвариантами $\mathcal{K}$.

Компоненты f- и h-вектора $\mathcal{K}$ выражаются через числа $\beta^{-i,2j}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}])$.

Биградуированные числа Бетти $\beta^{-i,2j}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}])$ также можно вычислять через симплициальные когомологии $\mathcal{K}$:

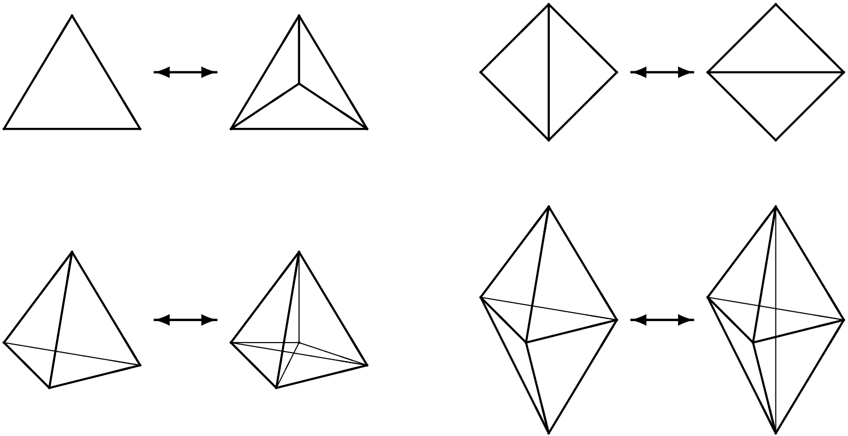
Теорема (Хохстер)

$$\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J\subset[m],\ |J|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K|_J),$$

где $K|_J$ – полный подкомплекс (ограничение $\mathcal{K}$ на $J \subset \{1,\ldots,m\}$).

Для работы с числами $\beta^{-i,2j}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}])$ можно также эффективно использовать пакет *Macaulay 2* для вычислений в коммутативной алгебре.

4. Бизвёздные преобразования в топологии и геометрии



Теорема (У. Пахнер, 1987)

Любые две кусочно линейно гомеоморфные триангуляции одного и того же многообразия переводятся друг в друга конечной последовательностью бизвёздных преобразований и изоморфизмов.

Приложения бизвёздных преобразований, звёздных подразделений и родственных операций

1. Построение локальной комбинаторной формулы для первого рационального класса Понтрягина триангулированного многообразия (А. А. Гайфуллин, 2004).
2. Доказана известная гипотеза Гала о свойствах чисел граней флаговых простых многогранников для нестоэдров (В. Д. Володин, 2010). Получены точные верхние и нижние границы для флаговых чисел многих важных семейств флаговых простых многогранников, возникающих в различных областях математики (В. М. Бухштабер, В. Д. Володин, 2011). В основе оценок лежит то, что все многогранники этих семейств получаются из куба последовательными срезками граней коразмерности 2.
3. Получены формулы для чисел мультипликативных образующих данной размерности колец флаговых векторов выпуклых многогранников (В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, 2011).

Приложения бизвёздных преобразований, звёздных подразделений и родственных операций

4. Доказательство наличия формулы для вычисления объёма симплициального 4-мерного многогранника по его комбинаторному строению и набору длин его рёбер. Доказательство постоянства объёма произвольного изгибаемого 4-мерного многогранника. (А. А. Гайфуллин, 2011)

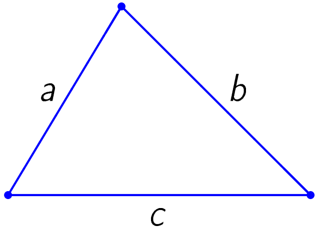
Комбинаторное вычисление классов Понтрягина

- Классы Понтрягина — классические инварианты многообразий; их определение существенно использует гладкую структуру на многообразии.
- В 1957/58 годах В. А. Рохлин и А. С. Шварц и, независимо, Р. Том доказали инвариантность рациональных классов Понтрягина относительно кусочно линейных гомеоморфизмов. Этот результат естественным образом поставил задачу о комбинаторном вычислении рациональных классов Понтрягина многообразия по его триангуляции.
- Важные результаты по этой задаче получили Габриэлов–Гельфанд–Лосик (1975), МакФерсон (1977), Левитт–Рурк (1978), Чигер (1983), Гельфанд–МакФерсон (1992), однако окончательное её решение получено не было.

Теорема (А. А. Гайфуллин, 2004)

1. *Имеется явный алгоритм, который по каждому m-мерному (ориентированному) комбинаторному многообразию K вычисляет $(m-4)$-мерный симплициальный цикл $Z \in C_{m-4}(K, \mathbb{Q})$, класс гомологий которого двойствен по Пуанкаре первому рациональному классу Понтрягина многообразия K.*
2. *Цикл Z вычисляется по многообразию K локально: он имеет вид*
$$Z = \sum_{\dim \sigma = m-4} c_\sigma \sigma,$$
где коэффициент c_σ зависит только от локального строения триангуляции K в окрестности симплекса σ, точнее, от линка L_σ симплекса σ в K. (Линк σ есть триангуляция 3-мерной сферы.)
3. *Для вычисления коэффициента c_σ надо перевести линк L_σ в границу 4-симплекса бизвёздными преобразованиями:*
$$L_\sigma = L_1 \rightsquigarrow L_2 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow L_k = \partial\Delta^4$$
и просуммировать вклады всех этих бизвёздных преобразований.

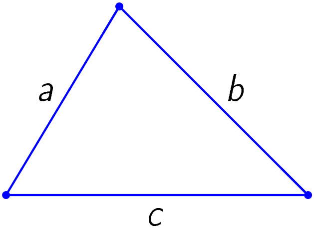
Формула Герона



$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

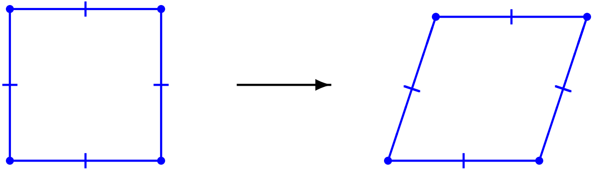
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Формула Герона



$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



Нет формулы для площади через длины рёбер

Формула Кэли–Менгера

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – n-мерный симплекс с вершинами $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и ℓ_{ij} – длина ребра $p_i p_j$.

Определитель Кэли–Менгера:

$$CM(p_0, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{01}^2 & \ell_{02}^2 & \cdots & \ell_{0n}^2 \\ 1 & \ell_{01}^2 & 0 & \ell_{12}^2 & \cdots & \ell_{1n}^2 \\ 1 & \ell_{02}^2 & \ell_{12}^2 & 0 & \cdots & \ell_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_{0n}^2 & \ell_{1n}^2 & \ell_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$V^2(\Delta) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(p_0, \ldots, p_n).$$

Вычисление объёма симплициального многогранника

Проблема

Пусть $n \geqslant 3$. Можно ли найти формулу для объёма симплициального n-мерного многогранника через длины его рёбер?

Эквивалентная проблема

Пусть $n \geqslant 3$. Можно ли найти формулу для объёма произвольного n-мерного многогранника через внутренние метрики его граней, то есть через длины рёбер и длины диагоналей собственных граней?

“Найти формулу” означает найти соотношение вида

$$V^N + a_1(\ell)V^{N-1} + \cdots + a_N(\ell) = 0,$$

где a_j — многочлены от длин рёбер многогранника.

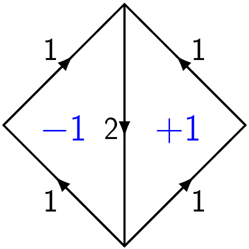
- $n = 3$: ДА, И. Х. Сабитов, 1996.
- $n = 4$: ДА, А. А. Гайфуллин, 2011.
- $n \geqslant 5$: НЕИЗВЕСТНО

Что такое симплициальный многогранник в $\mathbb{R}^4$?

Наивный ответ: Область, ограниченная замкнутой 3-мерной полиэдральной поверхностью.

Более общий ответ: Граница многогранника — 3-мерный цикл в $\mathbb{R}^4$, то есть формальная линейная комбинация (с целыми коэффициентами) ориентированных выпуклых 3-мерных симплексов в $\mathbb{R}^4$ такая, что её алгебраическая граница равна нулю.

Для таких многогранников определяется обобщённый объём.



Основные идеи доказательства ($n = 4$)

Теорема (А. А. Гайфуллин, 2011)

Для любого комбинаторного типа многогранников существует полиномиальное соотношение

$$Q(V,\ell) = V^N + a_1(\ell)V^{N-1} + a_2(\ell)V^{N-2} + \ldots + a_N(\ell)$$

между объёмом V многогранника и набором ℓ длин его рёбер. Здесь $a_j(\ell)$ — многочлены от длин рёбер с рациональными коэффициентами.

Доказательство этой теоремы индуктивное (по числу вершин, наименьшей степени вершины и т. п.). Упрощение многогранника производится при помощи следующих алгебраических операций: к границе многогранника можно прибавить или отнять границу какого-либо 4-мерного выпуклого симплекса в $\mathbb{R}^4$.

Такие операции являются естественными аналогами бизвёздных преобразований в рассматриваемой ситуации.

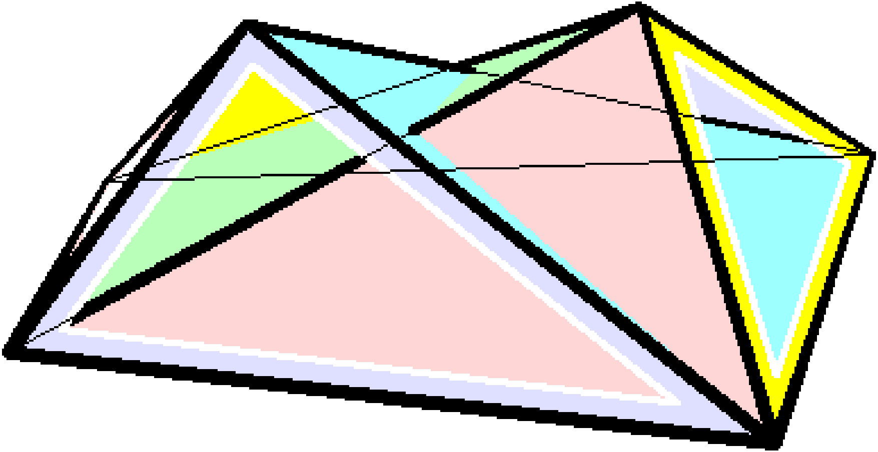
Изгибаемые многогранники

Определение

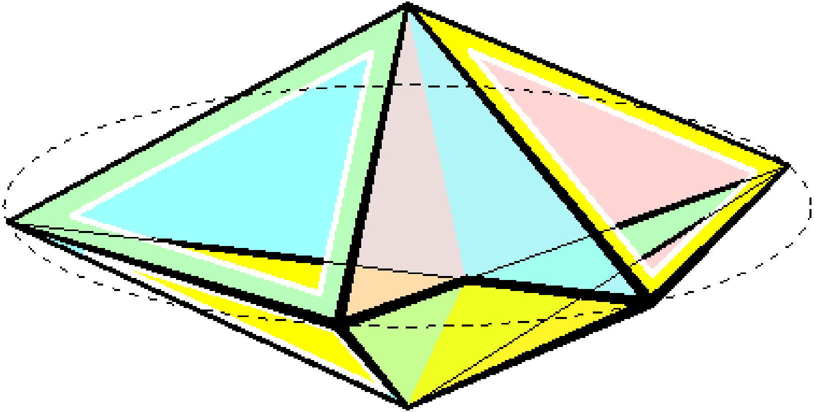
Изгибание многогранника — непрерывное семейство многогранников P_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, такое, что все собственные грани P_t остаются конгруэнтными себе в процессе изгибания, но многогранники P_{t_1} и P_{t_2} не конгруэнтны при $t_1 \neq t_2$.

- Теорема Коши: Выпуклые многогранники неизгибаемы.
- Брикар, 1897: Изгибаемые самопересекающиеся октаэдры.
- Коннелли, 1977: Пример вложенного изгибаемого многогранника.
- Штеффен, 1978: Простейший из известных вложенных изгибаемых многогранников (9 вершин).
- Фогельзангер, 1988: Многогранники общего положения неизгибаемы.
- Вальц, 1998, Штахель, 2000: Изгибаемые 4-мерные кросс-политопы.
- Неизвестно, существуют ли изгибаемые многогранники в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 5$.

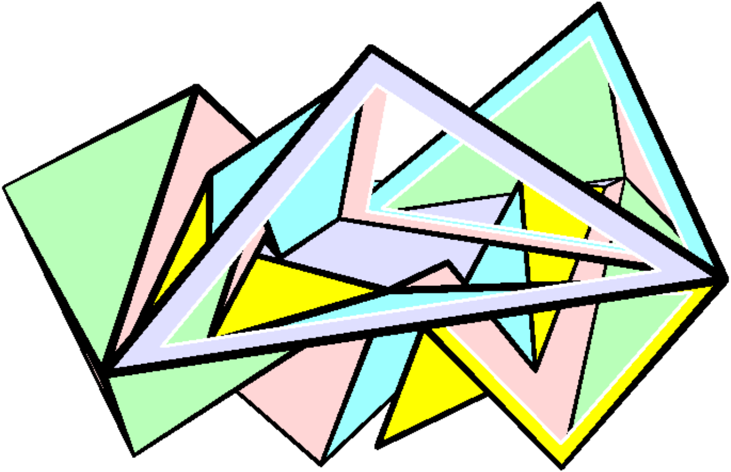
Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа



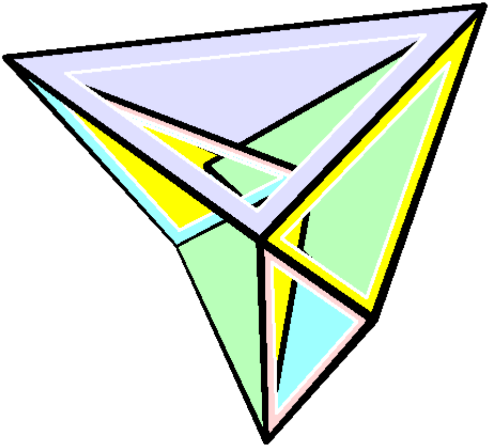
Изгибаемый октаэдр Брикара второго типа



Изгибаемый многогранник Коннелли – первый пример вложенного изгибаемого многогранника



Изгибаемый многогранник Штеффена – простейший из известных вложенных изгибаемых многогранников



Гипотеза (≈1978)

Объём $V(P_t)$ изгибаемого многогранника постоянен в процессе изгибания.

Теорема

1. (И. Х. Сабитов, 1996) *Гипотеза о кузнечных мехах верна в размерности 3.*
2. (А. А. Гайфуллин, 2011) *Гипотеза о кузнечных мехах верна в размерности 4.*

Литература

[1] В. М. Бухштабер, В. Д. Володин, *Точные верхние и нижние границы для нестоэдров*, Изв. РАН. сер. мат., **75**:6 (2011), 17–46.

[2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец,*Многогранники, числа Фибоначчи, алгебры Хопфа и квазисимметрические функции*, УМН, **66**:2(398) (2011), 67–162.

[3] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics.* University Lecture Series, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.

[4] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Москва, МЦНМО, 2004.

[5] Victor Buchstaber, Taras Panov. *Toric Topology.* arXiv, 2011–2012.

[6] А. А. Гайфуллин, *Локальные формулы для комбинаторных классов Понтрягина*, Изв. РАН. Сер. матем., **68**:5 (2004), 13–66.

[7] A. A. Gaifullin, *Sabitov polynomials for polyhedra in four dimensions*, arXiv:1108.6014.