Параллелоэдры

центральные проблемы и результаты

Алексей Гарбер

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

20 марта 2012 г.

Параллелоэдры

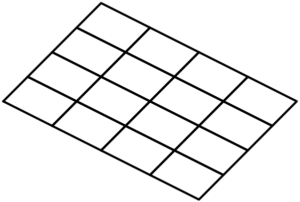
Определение

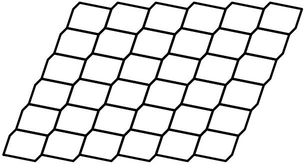
Выпуклый d-мерный многогранник P называется *параллелоэдром*, если все пространство $\mathbb{R}^d$ можно разбить на параллельные копии P.

Параллелоэдры

Определение

Выпуклый d-мерный многогранник P называется *параллелоэдром*, если все пространство $\mathbb{R}^d$ можно разбить на параллельные копии P.





Два типа двумерных параллелоэдров

Трехмерные параллелоэдры

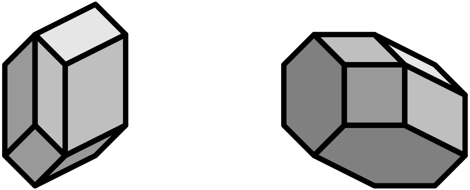
В 1885 году российский кристаллограф Е.С.Федоров классифицировал все пять типов трехмерных параллелоэдров.

Трехмерные параллелоэдры

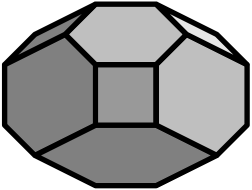
В 1885 году российский кристаллограф Е.С.Федоров классифицировал все пять типов трехмерных параллелоэдров.

Параллелепипед и шестиугольная призма с центрально-симметричным основанием

Трехмерные параллелоэдры



Ромбододекаэдр и удлиненный додекаэдр



Усеченный октаэдр

Свойства параллелоэдров

Теорема (Г.Минковский, 1897)

Любой d-мерный параллелоэдр P удовлетворяет следующим свойствам:

1. *P центрально-симметричен;*
2. *Любая гипергрань P центрально-симметрична;*
3. *Проекция P вдоль любой грани размерности $d-2$ — параллелограмм или центрально-симметричный шестиугольник.*

Свойства параллелоэдров

Теорема (Г.Минковский, 1897)

Любой d-мерный параллелоэдр P удовлетворяет следующим свойствам:

1. *P центрально-симметричен;*
2. *Любая гипергрань P центрально-симметрична;*
3. *Проекция P вдоль любой грани размерности $d-2$ — параллелограмм или центрально-симметричный шестиугольник.*

Теорема (Б.А.Венков, 1954)

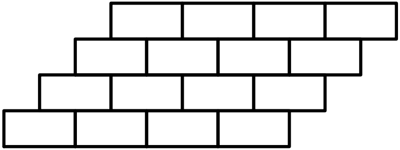
Три условия Минковского **достаточны** *для того, чтобы многогранник P являлся параллелоэдром.*

Разбиение грань-в-грань

В классическом понимании параллелоэдров разбиение всегда считалось разбиением *грань-в-грань*, когда пересечение двух параллелоэдров — грань каждого из них.

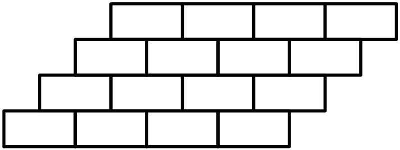
Разбиение грань-в-грань

В классическом понимании параллелоэдров разбиение всегда считалось разбиением *грань-в-грань*, когда пересечение двух параллелоэдров — грань каждого из них.



Разбиение грань-в-грань

В классическом понимании параллелоэдров разбиение всегда считалось разбиением *грань-в-грань*, когда пересечение двух параллелоэдров — грань каждого из них.

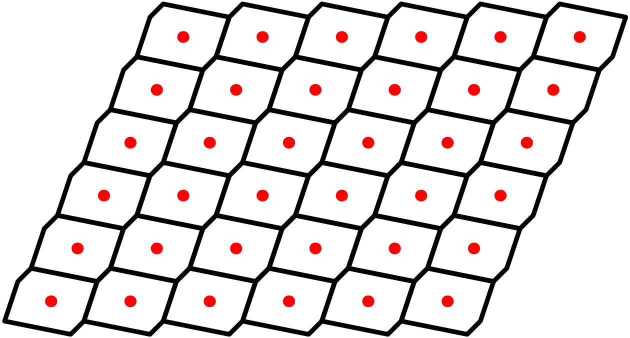


Теорема (П.МакМаллен, 1980)

Любой параллелоэдр (разбиение не обязательно грань-в-грань!) удовлетворяет трем условиям Минковского, а следовательно допускает и разбиение грань-в-грань.

Параллелоэдры и решетки

Рассмотрим разбиение $\mathcal{T}_P$ грань-в-грань на копии параллелоэдра P. Оно единственно с точностью до движения. Центры всех параллелоэдров образуют d-мерную решетку Λ_P.



О количестве гиперграней параллелоэдров

Теорема (Г.Минковский, 1897)

Количество гиперграней d-мерного параллелоэдра не превосходит $2(2^d - 1)$, причем эта оценка является неулучшаемой.

О количестве гиперграней параллелоэдров

Теорема (Г.Минковский, 1897)

Количество гиперграней d-мерного параллелоэдра не превосходит $2(2^d-1)$, причем эта оценка является неулучшаемой.

Доказательство.

Для каждого класса четности решетки найдется на более двух точек, параллелоэдры которых имеют общую гипергрань с фиксированной копией P. □

Стандартные грани

Определение

Грань параллелоэдра P (или разбиения $\mathcal{T}(P)$) называется *стандартной* если она является пересечением двух параллелоэдров в $\mathcal{T}(P)$.

Стандартные грани

Определение

Грань параллелоэдра P (или разбиения $\mathcal{T}(P)$) называется *стандартной* если она является пересечением двух параллелоэдров в $\mathcal{T}(P)$.

Например, все гиперграни P стандартны.

Стандартные грани

Определение

Грань параллелоэдра P (или разбиения $\mathcal{T}(P)$) называется *стандартной* если она является пересечением двух параллелоэдров в $\mathcal{T}(P)$.

Например, все гиперграни P стандартны.

Среди граней размерности $d-2$ стандартны только те, проекция вдоль которых есть параллелограмм.

Стандартные грани

Определение

Грань параллелоэдра P (или разбиения $\mathcal{T}(P)$) называется *стандартной* если она является пересечением двух параллелоэдров в $\mathcal{T}(P)$.

Например, все гиперграни P стандартны.

Среди граней размерности $d-2$ стандартны только те, проекция вдоль которых есть параллелограмм.

Все грани d-мерного куба являются стандартными.

Стандартные грани

Определение

Грань параллелоэдра P (или разбиения $\mathcal{T}(P)$) называется *стандартной* если она является пересечением двух параллелоэдров в $\mathcal{T}(P)$.

Например, все гиперграни P стандартны.

Среди граней размерности $d-2$ стандартны только те, проекция вдоль которых есть параллелограмм.

Все грани d-мерного куба являются стандартными.

Стандартные грани параллелоэдра центрально-симметричны и соответствуют полуцелым точкам решетки.

Пояс параллелоэдра

Определение

Поясом параллелоэдра P, соответствующим грани F размерности $d-2$, называется множество гиперграней, параллельных F.

Пояс параллелоэдра

Определение

Поясом параллелоэдра P, соответствующим грани F размерности $d-2$, называется множество гиперграней, параллельных F.

- В любом поясе 4 или 6 граней, так как все грани пояса проецируются в стороны соответствующего многоугольника.
- Пояс стандартной грани F состоит из 4 гиперграней, а нестандартной — из 6.

Теорема об индексе

Определение

Индексом стандартной грани F параллелоэдра P называется число $\frac{1}{n(F)}$, где $n(F)$ — количество копий P в $\mathcal{T}(P)$, которые сходятся в F.

Теорема об индексе

Определение

Индексом стандартной грани F параллелоэдра P называется число $\frac{1}{n(F)}$, где $n(F)$ — количество копий P в $\mathcal{T}(P)$, которые сходятся в F.

Теорема (Н.Долбилин, Теорема об индексе, 2009)

$$\sum_{\text{ст. грани}} \frac{1}{n(F)} = 2^d - 1.$$

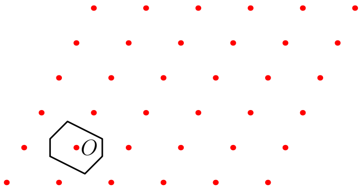
Из этой теоремы следует оценка на количество гиперграней, так как каждая грань дает вклад $\frac{1}{2}$ в сумму.

Параллелоэдры и решетки – 2

- Рассмотрим произвольную d-мерную решетку Λ и ее произвольную точку O.

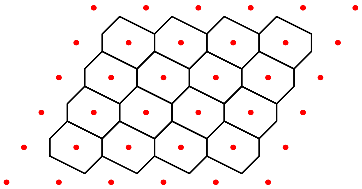
Параллелоэдры и решетки – 2

- Рассмотрим произвольную d-мерную решетку Λ и ее произвольную точку O.
- Рассмотрим многогранник, состящий из всех точек, которые ближе к O чем к другим точкам решетки (*многогранник Дирихле-Вороного* решетки Λ).



Параллелоэдры и решетки – 2

- Рассмотрим произвольную d-мерную решетку Λ и ее произвольную точку O.
- Рассмотрим многогранник, состящий из всех точек, которые ближе к O чем к другим точкам решетки (*многогранник Дирихле-Вороного* решетки Λ).
- Многогранник DV_Λ параллелоэдр, а точки Λ — центры многогранников разбиения.



Гипотеза Вороного

Гипотеза (Г.Вороной, 1909)

Любой параллелоэдр аффинно эквивалентен многограннику Вороного для некоторой решетки Λ.

Малые размерности

- Случай $d = 2$ считается фольклорным.
- Случай $d = 3$. Все трехмерные параллелоэдры перечислены Федоровым, для каждого из них несложно проверить гипотезу Вороного.
- Случай $d = 4$. В 1929 Б.Делоне перечислил 51 четырехмерный паралллеоэдр; в 1973 Штогрин добавил последний 52-й параллелоэдр и тем самым завершил классификацию в случае $d = 4$.

Дуальные клетки

Определение

Дуальной клеткой для грани F разбиения $\mathcal{T}(P)$ называется множество всех центров паралллелоэдров, сходящихся в F. Клетка называется *k-мерной* если размерность F равна $d - k$.

Дуальные клетки

Определение

Дуальной клеткой для грани F разбиения $\mathcal{T}(P)$ называется множество всех центров паралллелоэдров, сходящихся в F. Клетка называется *k-мерной* если размерность F равна $d-k$.

На дуальных клетках задана структура клеточного комплекса.

Дуальные клетки

Определение

Дуальной клеткой для грани F разбиения $\mathcal{T}(P)$ называется множество всех центров паралллелоэдров, сходящихся в F. Клетка называется *k-мерной* если размерность F равна $d-k$.

На дуальных клетках задана структура клеточного комплекса.

Существует пять комбинаторных типов трехмерных даульных клеток: тетраэдр, октаэдр, четырехугольная пирамида, треугольная призма и куб.

Дуальные клетки

Определение

Дуальной клеткой для грани F разбиения $\mathcal{T}(P)$ называется множество всех центров паралллелоэдров, сходящихся в F. Клетка называется *k-мерной* если размерность F равна $d-k$.

На дуальных клетках задана структура клеточного комплекса.

Существует пять комбинаторных типов трехмерных даульных клеток: тетраэдр, октаэдр, четырехугольная пирамида, треугольная призма и куб.

Теорема (А.Магазинов, 2012)

Количество вершин в k-мерной дуальной клетке не больше 2^k.

Подход Вороного — канонические нормировки

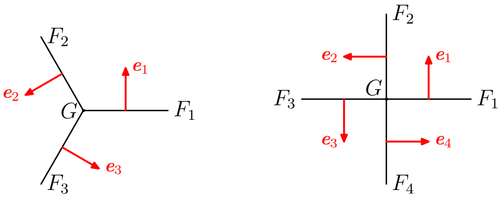
Определение

Функция $n(F)$, определенная на множестве всех гиперграней разбиения $\mathcal{T}_P$ называется *канонической нормировкой* если она удовлетворяет следующим условиям на гиперграни F_i, которые содержат $(d-2)$-мерную грань G:

Подход Вороного — канонические нормировки

Определение

Функция $n(F)$, определенная на множестве всех гиперграней разбиения $\mathcal{T}_P$ называется *канонической нормировкой* если она удовлетворяет следующим условиям на гиперграни F_i, которые содержат $(d-2)$-мерную грань G:



$$\sum \pm n(F_i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

Каноническая нормировка

Как построить каноническую нормировку для данного разбиения $\mathcal{T}_P$?

Каноническая нормировка

Как построить каноническую нормировку для данного разбиения $\mathcal{T}_P$?

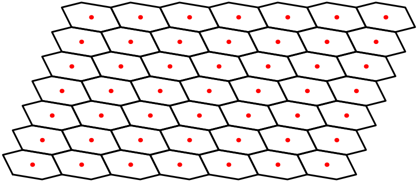
- Если две гиперграни F_1 и F_2 содержат общую нестандартную $(d-2)$-грань то значение канонической нормировки на одной гиперграни однозначно определяет значение на другой.

Каноническая нормировка

Как построить каноническую нормировку для данного разбиения $\mathcal{T}_P$?

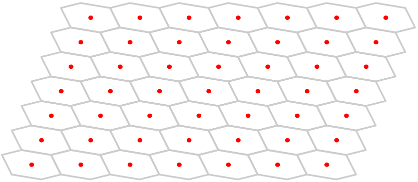
- Если две гиперграни F_1 и F_2 содержат общую нестандартную $(d-2)$-грань то значение канонической нормировки на одной гиперграни однозначно определяет значение на другой.
- Если две гиперграни F_1 и F_2 содержат общую стандартную $(d-2)$-то единственное условие состоит в том, что если F_1 и F_2 противоположны, то значения нормировки равны.

Женератрисса Вороного



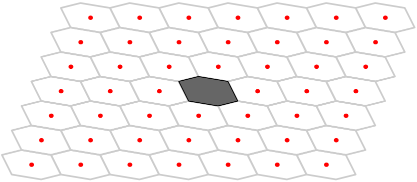
Допустим у нас есть разбиение $\mathcal{T}_P$.

Женератрисса Вороного



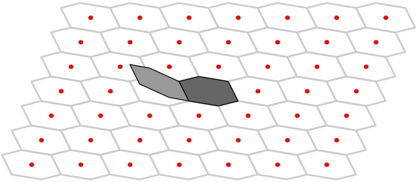
Мы построим кусочно-линейную функцию — женератриссу $\mathcal{G}: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$.

Женератрисса Вороного



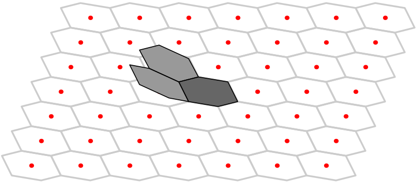
Шаг 1: Положим $\mathcal{G}$ равной 0 на одном из многогранников.

Женератрисса Вороного



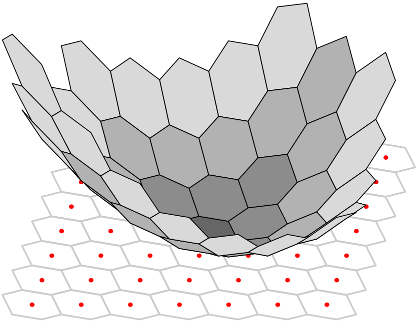
Шаг 2: Когда мы переходим через гипергрань, то градиент $\mathcal{G}$ меняется в соответствии с канонической нормировкой.

Женератрисса Вороного



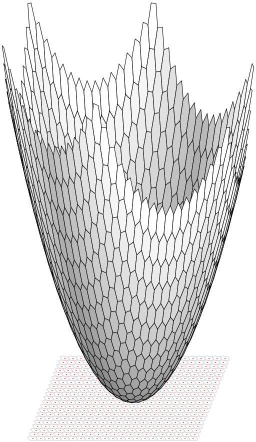
Шаг 2: А именно, если мы переходим через гипергрань F с нормалью $\mathbf{e}$, то к градиенту добавляется вектор $n(F)\mathbf{e}$.

Женератрисса Вороного



В результате получится кусочно-линейная функция $\mathcal{G}$ — женератрисса Вороного.

Женератрисса Вороного – 2



На что похож график этой функции?

Свойства Женератриссы

- График $\mathcal{G}$ похож на “кусочно-линейный” параболоид.

Свойства Женератриссы

- График $\mathcal{G}$ похож на "кусочно-линейный" параболоид.
- Найдется параболоид $y = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ для некоторой положительной квадратичной формы Q, касающийся $\mathcal{G}$ в центрах шестиугольных (в нашем случае!) кусочков.

Свойства Женератриссы

- График $\mathcal{G}$ похож на "кусочно-линейный" параболоид.
- Найдется параболоид $y = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ для некоторой положительной квадратичной формы Q, касающийся $\mathcal{G}$ в центрах шестиугольных (в нашем случае!) кусочков.
- Если мы рассмотрим аффинное преобразование $\mathcal{A}$, переводящее этот параболоид в $y = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, то разбиение $\mathcal{T}_P$ преобразуется в разбиение Вороного для некоторой решетки.

Свойства Женератриссы

- График $\mathcal{G}$ похож на "кусочно-линейный" параболоид.
- Найдется параболоид $y = \mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$ для некоторой положительной квадратичной формы Q, касающийся $\mathcal{G}$ в центрах шестиугольных (в нашем случае!) кусочков.
- Если мы рассмотрим аффинное преобразование $\mathcal{A}$, переводящее этот параболоид в $y = \mathbf{x}^T\mathbf{x}$, то разбиение $\mathcal{T}_P$ преобразуется в разбиение Вороного для некоторой решетки.

Следовательно, для доказательства гипотезы Вороного на достаточно показать существование канонической нормировки для данного разбиения $\mathcal{T}_P$.

Гипотеза Вороного в частных случаях

Теорема (Р.Эрдал, 1999)

Гипотеза Вороного верна для параллелоэдров, являюшихся зонотопами, то есть проекциями кубов высшей размерности.

Гипотеза Вороного в частных случаях

Теорема (Г.Вороной, 1909)

Гипотеза Вороного верна для примитивных d-мерных параллелоэдров, то есть для параллелоэдров, у которых каждая вершина разбиения $\mathcal{T}(P)$ лежит в $d+1$ копии P.

Теорема (О.Житомирский, 1929)

Гипотеза Вороного верна для параллелоэдров, у которых нет стандартных граней размерности $d-2$.

Гипотеза Вороного в частных случаях – 2

Теорема (А.Ордин, 2005)

Гипотеза Вороного верна для d-мерных параллелоэдров, среди трехмерных дуальных клеток которых встречаются только тетраэдры, октаэдры и четырехугольные пирамиды.

Теорема (А.Гаврилюк, А.Г., А.Магазинов, 2012)

Если поверхность параллелоэдра остается односвязной при выкидывании стандартных граней размерности $d-2$, то для него верна гипотеза Вороного.

Гипотеза о размерности

Гипотеза

Аффинная оболочка точек k-мерной дуальной клетки имеет размерность k.

Гипотеза о размерности

Гипотеза

Аффинная оболочка точек k-мерной дуальной клетки имеет размерность k.

Иногда называется широко известной, хотя никто не может дать ссылку на доказательство.

Гипотеза о размерности

Гипотеза

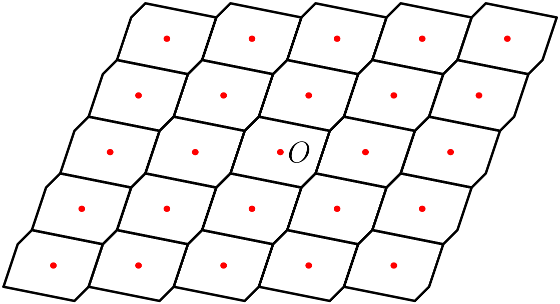
Аффинная оболочка точек k-мерной дуальной клетки имеет размерность k.

Иногда называется широко известной, хотя никто не может дать ссылку на доказательство.

Выполнение этой гипотезы необходимо для гипотезы Вороного в силу того, что для каждого разбиения Вороного существует двойственная триангуляция Делоне. Грани многогранников Делоне и будут дуальными клетками.

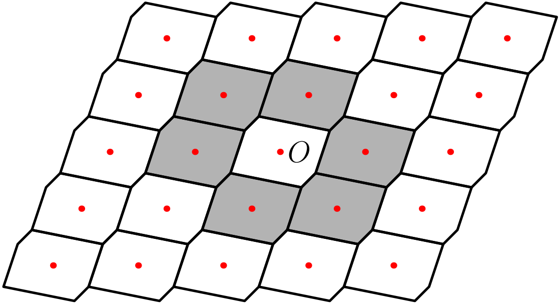
Вторая гипотеза Вороного

Рассмотрим произвольный параллелоэдр P_0 с центром O



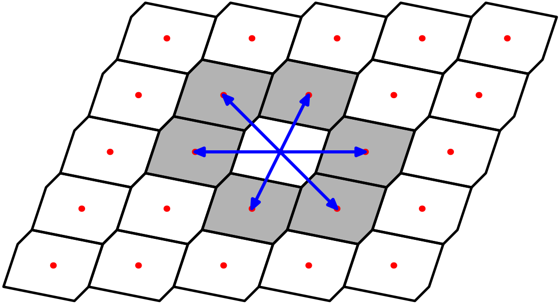
Вторая гипотеза Вороного

Рассмотрим параллелоэдры $P_1, \ldots, P_n$ с центрами $O_1, \ldots, O_n$, которые имеют общую гипергрань с P_0.



Вторая гипотеза Вороного

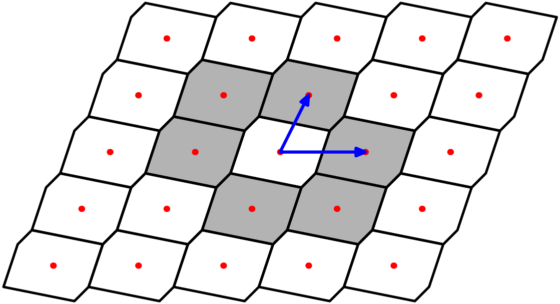
Тогда векторы $\overrightarrow{OO_1}, \dots, \overrightarrow{OO_n}$ являются векторами решетки Λ и более того порождают Λ.



Вторая гипотеза Вороного

Гипотеза

Среди этих векторов можно выбрать d, которые образуют базис Λ.



Другие задачи теории параллелэдров

- Задача о единственности параллелоэдра Вороного для данного параллелоэдра;
- Задача о поясном диаметре.

THANK YOU!