Комбинаторика выпуклых многогранников и элементы торической топологии

В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, Н.Ю. Ероховец

Часть I

Осенний семестр. Выпуклые многогранники

1 Основные понятия [6, 12, 19].

1.1 Два определения многогранника: выпуклая оболочка конечного набора точек и ограниченное пересечение замкнутых полупространств.

1.2 Вершины как крайние точки многогранника.

1.3 Грани многогранника как пересечения многогранника с опорными плоскостями.

1.4 Комбинаторно эквивалентные многогранники.

1.5 Двойственный многогранник.

Пусть 0 – внутренняя точка многогранника. Тогда

$$P^* = \{y \in \mathbb{R}^n \colon \langle y, x\rangle + 1 \geqslant 0, \forall x \in P\},$$

где $\langle y, x\rangle$ – стандартное скалярное произведение.

1.6 Операции с многогранниками.

Конус, джойн, прямое произведение многогранников, сумма Минковского.

Задача 1. *Известна формула деления отрезка в отношении* $C = \frac{mA+nB}{m+n}$, *где* $\frac{m}{n} = \frac{CB}{CA}$. *Получить аналогичную формулу для деления треугольника точкой. Ответ:*

$$D = \frac{S_{BCD}A + S_{CAD}B + S_{ABD}C}{S_{BCD} + S_{CAD} + S_{ABD}}$$

Задача 2. *Записать формулы для замечательных точек треугольника (барицентра, ортоцентра, центров вписанной и описанной окружности)*

Задача 3. *Доказать, что простой* n*-мерный многогранник, у которого все* 2*-мерные грани являются треугольниками, комбинаторно эквивалентен* n*-мерному симплексу* Δ^n.

Задача 4. *Доказать, что простой* n*-мерный многогранник, у которого все* 2*-мерные грани являются квадратами, комбинаторно эквивалентен* n*-мерному кубу* I^n.

Задача 5. *Доказать, что простой* 3*-мерный многогранник, у которого все* 2*-мерные грани являются пятиугольниками, комбинаторно эквивалентен додекаэдру.*

Задача 6. *(*) Доказать, что простой многогранник, у которого все 2-мерные грани являются квадратами или треугольниками, комбинаторно эквивалентен прямому произведению некоторого числа симплексов.*

Задача 7. *Описать решётку граней джойна двух многогранников.*

Задача 8. *Доказать, что* $(P^*)^* = P$, *если* 0 *– внутренняя точка многогранника.*

2 Примеры многогранников [12, 5, 4].

2.1 Циклический многогранник. Условие чётности Гейла.

2.2 Смежностные многогранники.

2.3 Пермутоэдр $Pe(1, 2, \dots, n)$.

2.4 Многогранники Ньютона. Пермутоэдр как многогранник Ньютона определителя Вандермонда.

Задача 9. *Недостающая грань – это такой набор вершин, что любой поднабор является множеством вершин грани, а сам набор вершин не является. Найти все недостающие грани циклического многогранника.*

Задача 10. *Доказать, что простой* n*-мерный многогранник, у которого любые* k *гиперграней пересекаются, является симплексом, если* $k > \frac{n}{2}$.

Задача 11. *Описать решётку граней пермутоэдра*

1. $Pe(1, 1, 2, 3, 4 \dots, n-1)$.
2. $Pe(a_1, a_2, \dots, \dots, a_n)$, *где* $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ *– произвольные вещественные числа.*

3 Конусы и полиэдры [12]

1. Задание полиэдра неравенствами и образующими.
2. Грани полиэдров.
3. Конусы и веера.
4. Нормальный веер многогранника.
5. Конус в вершине многогранника.
6. Вершинная и гранная фигуры многогранника.

Задача 12. *Описать геометрическую реализацию гранной фигуры многогранника.*

4 Нестоэдры [4, 21, 8, 12]

4.1 Сумма Минковского многогранников. Зонотопы.

4.2 Нормальный веер суммы Минковского многогранников.

4.3 Пурмутоэдр $Pe(1, 2, \ldots, 2^n)$ как сумма Минковского всех граней симплекса Δ^{n+1}.

4.4 Определение нестоэдра.

4.5 Простота нестоэдра. Описание его вершин

4.6 Граф-ассоциэдры: ассоциэдр, звездоэдр, пермутоэдр, циклоэдр

Задача 13. *Описать решётку граней нестоэдра.*

Задача 14. *Доказать, что в аффинной оболочке любого n-мерного нестоэдра можно выбрать аффинную систему координат, в которой нестоэдр является многогранником Дельзана: вдоль каждой нормали к гиперграни можно выбрать целочисленный вектор так, что в каждой вершине многогранника такие целочисленные векторы образуют базис в $\mathbb{Z}^n$, то есть определитель, составленный из этих векторов, равен ± 1.*

5 Нестоэдры и дифференциальные уравнения [3, 4]

5.1 Перечисляющие многочлены: f- и h-многочлен.

5.2 Кольцо комбинаторных многогранников.

5.3 Доказательство формулы $f(dP) = \frac{\partial}{\partial t} f(P)$ для простых многогранников.

5.4 Последовательности многогранников и их производящие функции.

5.5 Дифференциальные уравнения для последовательностей пермутоэдров, ассоциэдров, звездоэдров и циклоэдров.

Задача 15. *Доказать, что многогранник является простым тогда и только тогда, когда* $f(dP) = \frac{\partial}{\partial t} f(P)$.

Задача 16. *(*) Придумать новую последовательность нестоэдров и производящую функцию так, чтобы получилось дифференциальное уравнение, описываемое короткой формулой.*

6 Двойственность Гейла и диаграммы Гейла [12, 19]

1. Преобразование Гейла и его основные свойства.

2. Диаграммы Гейла: плоские, сферические, многогранников.

3. Классификация многогранников с $m \leqslant n + 3$ гипергранями.

4. Конструкция многогранника $P(a_1, \ldots, a_m)$ (i-ая точка в диаграмме Гейла берётся a_i раз).

Задача 17. *Доказать, что многогранники проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их диаграммы Гейла совпадают.*

Задача 18. *Построить диаграмму Гейла циклического многогранника* $C^n(n+3)$.

Задача 19. *Доказать, что любой простой* n*-мерный многогранник с* $m = n+2$ *гипергранями проективно эквивалентен прямому произведению двух симплексов.*

Задача 20. *Для многогранника* P*, заданного неравенствами, описать задание неравенствами многогранника* $P(a_1, \ldots, a_m)$.

Задача 21. *Вычислить* h*-полином многогранника* $(C^n(n+3))^*$.

7 Шеллинговость многогранников. Формула Эйлера-Пуанкаре. g-теорема [12, 5, 15]

7.1 Полиэдральные комплексы. Шеллинговость. g-теорема.

7.2 Шеллинг Брюггерсера-Мани многогранников.

7.3 Доказательство формулы Эйлера-Пуанкаре.

7.4 Соотношения Дена-Соммервилля для простого многогранника как следствие формулы $f(dP) = \frac{\partial}{\partial t} f(P)$.

7.5 Формулировка и идея доказательства g-теоремы.

Задача 22. *Доказать, что если $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ – шеллинг многогранника, то $(F_m, \ldots, F_2, F_1)$ также является его шеллингом.*

Задача 23. *Доказать соотношения Дена-Соммервилля (симметричность h-многочлена) при помощи линейной функции общего положения. А именно, показать, что h_i – это число вершин, в которые входит ровно i рёбер в ориентации роста линейной функции.*

Задача 24. *(*) Доказать g-теорему для n-мерных простых многогранников с $m \leqslant n+3$.*

Задача 25. *(*) Доказать формулу Эйлера-Пуанкаре при помощи линейной функции общего положения, используя многогранник, двойственный к многограннику с шеллингом Брюггерсера-Мани.*

8 Графы многогранников. Теорема Штейница. [7, 12, 19]

8.1 Линейные функции в общем положении.

8.2 Теорема Балинского о n-связности графа n-мерного многогранника.

8.3 Теорема Штейница.

8.3.1 Кусочно-линейные теоремы Жордана и Шёнфлиса.

8.3.2 Наличие 3-валентной вершины или 3-угольника у любого простого планарного 3-связного графа.

8.3.3 Редукции.

8.3.4 Медиальные графы и многогранники. Связь с теоремой Кёбе-Андреева-Тёрстона.

8.3.5 Линзовые графы. Завершение доказательства.

Задача 26. *Пусть G – граф без изолированных вершин по крайней мере с 4 рёбрами на плоскости. Доказать, что*

- *он связен тогда и только тогда, когда каждая его грань имеет связную границу.*
- *если в нём нет петель, то он 2-связен тогда и только тогда, когда каждая его грань ограничена циклом без самопересечений.*
- *если в нём нет петель и кратных рёбер, то он 3-связен тогда и только тогда, когда каждая его грань ограничена простым циклом и если границы двух граней пересекаются, то по вершине или по ребру.*

Задача 27. *Доказать, что простой 3-связный граф на плоскости, имеющий больше трёх рёбер, имеет по крайней мере 6 рёбер.*

Задача 28. *Доказать, что плоский граф k-связен тогда и только тогда, когда двойственный граф k-связен, $k = 0, 1, 2$.*

Задача 29. *Доказать, что если графы двух трёхмерных многогранников одинаковы, то многогранники комбинаторно эквивалентны.*

Задача 30. *Доказать, что для простого плоского 3-связного графа более чем с 3 рёбрами его медиальный граф тоже обладает этим свойством.*

Задача 31. *1. Доказать, что замкнутая несамопересекающаяся ломаная разбивает плоскость на две связные компоненты (ограниченную и неограниченную) при помощи чётности числа точек пересечения луча с ломаной.*

2. *Доказать, что ограниченная часть кусочно-линейно изоморфна правильному выпуклому многоугольнику при помощи вспомогательного факта о том, что любая замкнутая несамопересекающаяся ломаная имеет диагональ.*

Задача 32. *Доказать, что для любой замкнутой несамопересекающейся ломаной на плоскости существует отрезок, соединяющий её вершины, все внутренние точки которого лежат в ограниченной компоненте дополнения до ломаной (то есть невыпуклый многоугольник имеет диагональ).*

Задача 33. *Пусть* p_k *– число* k*-угольных граней трёхмерного многогранника. Доказать, что*

$$2p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geqslant 7} (k-6)p_k.$$

Задача 34. *Доказать, что существует всего пять правильных трёхмерных многогранников, то есть многогранников, все грани которых являются правильными многоугольниками и все многогранные углы в вершинах конгруэнтны (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр). Построить правильные многогранники. Показать, что куб является двойственным многогранником к октаэдру, додекаэдр – к икосаэдру, а тетраэдр – к самому себе.*

Задача 35. *Доказать, что любой простой 3-мерный многогранник комбинаторно получается из симплекса при помощи операций срезки вершины, ребра или пары смежных рёбер одной плоскостью.*

Задача 36. *Доказать, что для простого выпуклого 3-мерного многогранника* P *с* $m \geqslant 6$ *гранями найдётся (геометрически, а не только комбинаторно) простой многогранник* Q *с* $m-1$ *гранью, из которого* P *получается срезкой вершины, ребра или пары рёбер одной плоскостью.*

Задача 37. *Доказать теорему Штейница для простых 3-мерных многогранников.*

Задача 38. *Фуллерен – это простой выпуклых трёхмерный многогранник, все грани которого являются пятиугольниками и шестиугольниками. Доказать, что*

1. *каждый фуллерен имеет ровно 12 пятиугольников;*

2. *фуллерен с 12 гранями комбинаторно эквивалентен додекаэдру;*

3. *не существует фуллерена с одним шестиугольником;*

4. *существует один комбинаторный тип фуллеренов с двумя шестиугольниками – 6-бочка. Поверхность 6-бочки склеена из двух фрагментов, каждый из которых состоит из шестиугольника, окруженного пятиугольниками.*

Задача 39. *Доказать, что любой конечный 3-валентный сферический граф, каждая компонента дополнения которого ограничена циклом из пяти или шести рёбер, является графом фуллерена.*

Часть II

Весенний семестр. Элементы торической топологии

9 Основные объекты торической топологии [17, 15, 16].

9.1 Четыре пространства, сопоставляемые простому многограннику.

9.2 Определение момент-угол комплекса.

9.3 Кубический комплекс простого многогранника.

9.4 Барицентрическое вложение многогранника в кубический комплекс.

9.5 Примеры для симплекса и куба.

Задача 40. *Описать вещественный момент-угол комплекс для многоугольника.*

Задача 41. *(*) Описать момент-угол комплекс для многоугольника.*

Задача 42. *Доказать, что* $\pi_1(\mathcal{Z}_P) = \pi_2(\mathcal{Z}_{\mathcal{P}}) = 0$.

10 Три определения момент-угол комплекса [17, 15, 16].

10.1 Момент-угол комплекс как полиэдральное произведение.

10.2 Конструкция Дэвиса-Янушкевича.

10.3 Момент-угол комплекс как пересечение квадрик.

Задача 43. *Вывести из определения, что момент-угол комплекс, заданный как пересечение квадрик, является гладким подмногобразием в* $\mathbb{C}^m$ *с тривиальным нормальным расслоением.*

11 Момент-угол многобразие как пересечение квадрик [17, 15, 16, 14, 19].

11.1 Диаграммы Гейла простых многогранников. [19, 12]

Задача 44. *Дать критерий того, что набор точек в* $\mathbb{R}^{m-n-1}$ *является преобразованием Гейла*

1. *некоторого* n*-мерного многогранника* $P \subset \mathbb{R}^n$ *с* m *гипергранями.*
2. *простого* n*-мерного многогранника* $P \subset \mathbb{R}^n$ *с* m *гипергранями.*

11.2 Триангуляции многогранников. [12]

Задача 45. *Пусть* $v_1, \ldots, v_N$ *– все вершины выпуклого многогранника* $P \subset \mathbb{R}^n$*. Доказать, что можно выбрать набор параметров* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$*, такой что нижние грани многогранника*

$$\widehat{P} = \operatorname{Conv}\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_N \\ \alpha_N \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

задают триангуляцию многогранника P*.*

11.3 Теорема «о еже». Формулировка теорем Минковского о существовании и единственности выпуклого многогранника с заданными нормалями и объёмами граней.

11.4 Момент-угол комплекс как пересечение квадрик.

Задача 46. *Пусть набор из* $(m-n)$ *квадрик в* $\mathbb{Z}^m$ *вида*

$$\begin{gathered} u_1^1|z_1|^2 + \cdots + u_m^1|z_m|^2 = 0; \\ \cdots \\ u_1^{m-n-1}|z_1|^2 + \cdots + u_m^{m-n-1}|z_m|^2 = 0; \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1 \end{gathered}$$

задаёт гладкое подмногообразие, причём в каждой его точке ранг матрицы Якоби равен $(m-n)$*. Сопоставить такому набору многогранник и описать связь его момент-угол многообразия с указанным подмногообразием.*

Задача 47. *Описать топологический тип подмногобразия, задаваемого двумя квадриками*

$$\begin{gathered} u_1|z_1|^2 + \cdots + u_m|z_m|^2 = 0; \\ |z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2 = 1 \end{gathered}$$

у которых ранг матрицы Якоби в каждой точке подмногообразия равен двум.

11.5 Эквивариантный гомеоморфизм с пространством из конструкции Дэвиса-Янушкевича

Задача 48. *(**) [14] Доказать, что если два выпуклых многогранника, заданные линейными неравенствами в $\mathbb{R}^n$, комбинаторно эквивалентны, то соответствующие им пересечения квадрик эквивариантно диффеоморфмны. Таким образом, гладкая структура на момент-угол комплексе, задаваемая из пересечения квадрик, единственна.*

12 Когомологии момент-угол комплексов [17, 16, 15]

12.1 Клеточное разбиение момент-угол комплекса

12.2 Клеточная аппроксимация диагонального отображения

12.3 Умножение в кольце клеточных коцепей

Изоморфизм кольца клеточных коцепей с дифференциальным кольцом

$$R^*(P) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(v_i^2 = 0, u_i v_i = 0, v_{i_1}, \dots, v_{i_k} = 0, \text{ если } F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing),$$
$$du_i = v_i, dv_i = 0$$

13 Формула Хохстера

13.1 Мультиградуированная структура в когомологиях

13.2 Описание кольца когомологий момент-угол комплекса через приведённые когомологии полных подкомплексов [17, Раздел 12.7]

$$H^*(\mathcal{Z}_P) = \bigoplus_{\omega} \widetilde{H}^*(K_\omega),$$

где $H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_P) = \widetilde{H}^{|\omega|-i-1}(K_\omega)$ и $\widetilde{H}^{-1}(\varnothing) = \mathbb{Z}$.

Задача 49. *Доказать, что для простого многогранника P имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$K_\omega \sim P_\omega,$$

где $P_\omega = \bigcup_{i\in\omega} F_i$ – объединение гиперграней.

13.3 Примеры

13.3.1 Малые размерности [17, Раздел 12.9]

13.3.2 Трёхмерные многогранники: кольцо не имеет кручения [17, Раздел 14.1]

Задача 50. *Вычислить кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$, если P – m-угольник.*

Задача 51. *Вычислить кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$, если $P = C^{m-3}(m)^*$.*

Задача 52. *Вычислить кольцо когомологий $H^*(\mathcal{Z}_P)$, если P – простой многогранник с $m = n+3$.*

Задача 53. *Доказать, что для любого подмножества $\omega \subset [m] = \{1, 2, \dots, m\}$, $\omega \neq \varnothing$, $\omega \neq [m]$, пространство P_ω гомеоморфно $(n-1)$-мерному многообразию с границей.*

14 Свойства кольца когомологий момент-угол комплекса

14.1 Описание через пары (P, P_ω)

Имеет место изоморфизм $H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_P) \simeq H^{|\omega|-i}(P, P_\omega)$, причём для $\omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing$ с точностью до знака (который завит только от i, j, ω_1 и ω_2) умножение в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ совпадает с $\cup$-умножением

$$H^{|\omega_1|-i}(P, P_{\omega_1}) \times H^{|\omega_2|-j}(P, P_{\omega_2}) \to H^{|\omega_1|+|\omega_2|-i-j}(P, P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2})$$

Задача 54. *Доказать изоморфизм $H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_P) \simeq H^{|\omega|-i}(P, P_\omega)$ на уровне клеточных коцепей.*

Задача 55. *Из изоморфизма на уровне клеточных коцепей найти формулу для знака.*

Задача 56. *Придумать пример, когда знак действительно возникает.*

Задача 57. *Доказать, что имеет место кусочно-линейный гомеоморфизм*

$$CK \simeq I_K = ([0,1], \{1\})^K.$$

14.2 Кольцо Стенли-Раснера

$$\mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]/(v_{i_1} \dots v_{i_k} \colon F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing).$$

Задача 58 (Теорема Брунса-Губеладзе)**.** *Доказать, что если кольцо Стенли-Райснера многогранников изоморфны как кольца (не учитывая градуировки), то многогранник комбинаторно экивалентны.*

14.3 Изоморфизм с Tor-алгеброй

$$H^*(\mathcal{Z}_P, \mathbb{Z}) \simeq Tor_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[P], \mathbb{Z})$$

Задача 59. *Доказать изоморфизм $H^*(\mathcal{Z}_P, \mathbb{Z}) \simeq Tor_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[P], \mathbb{Z})$. Для этого*

1. *Доказать, что резольвента Кошуля*

$$0 \to \Lambda^{m-n}[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \to$$
$$\to \dots \to \Lambda^{-1}[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \to \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \to \mathbb{Z} \to 0$$

   является свободной резольвентой для $\mathbb{Z}$ как модуля над кольцом $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ (структура модуля тривиальна: $v_i \cdot 1 = 0$ для всех v_i).

2. *Доказать, что $Tor_A(M, N) = Tor_A(N, M)$.*

14.4 Мультиградуированная двойственность Пуанкаре

По модулю кручения билинейное отображение

$$H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_P) \times H^{-(m-n-i),2([m]\setminus\omega)}(\mathcal{Z}_P) \to H^{-(m-n),2[m]}(\mathcal{Z}_P)$$

имеет в любых базисах матрицу с определителем ± 1.

Задача 60. *Написать формулу для клеточного фундаментального класса*

$$[\mathcal{Z}_P] \in H_{-(m-n),2[m]}(\mathcal{Z}_P) \simeq H_{m+n}(\mathcal{Z}_P).$$

Задача 61. *Доказать, что:*

$$H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_P) \simeq H_{-(m-n-i),2([m]\setminus\omega)}(\mathcal{Z}_P).$$

15 Описание умножения в формуле Хохстера

15.1 Двойственность Пуанкаре-Лефшеца

Задача 62. *Доказать, что для любого простого многогранника P^n с гипергранями $F_1, \dots, F_m$ и подмножества $\omega \subset [m] = \{1, \dots, m\}$, $\varnothing \neq \omega \neq [m]$, множество $P_\omega = \bigcup\limits_{i\in\omega} F_i$ гомеоморфно $(n-1)$-мерному ориентируемому многообразию с краем.*

Имеет место изоморфизм Пуанкаре-Лефшеца ([20, Theorem 3.43]):

$$H^i(P_\omega, \partial P_\omega) \simeq H_{n-i-1}(\partial P_\omega).$$

15.2 Описание двойственности Пуанкаре-Лефшеца через K_ω

1. Определения индекса пересечения
$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon C_k(P_\omega, \partial P_\omega) \times C_{n-k-1}(K_\omega) \to \mathbb{Z}.$$
Задача 63. *Доказать формулу* $\langle dG, \tau \rangle = (-1)^{\dim G} \langle G, d\tau \rangle$.

2. Отображение $F \to \langle F, \sigma(F) \rangle \sigma(F)^*$ задаёт изоморфизм цепных комплексов
$$C_k(P_\omega, \partial P_\omega) \to C^{n-k-1}(K^\omega)$$
с точностью до знака $(-1)^k$ для границы.

3. При изоморфизме $H_k(P_\omega, \partial P_\omega) \to H^{n-k-1}(K^\omega)$ подгруппа
$$\widehat{H}_k(P_\omega, \partial P_\omega) = H_k(P_\omega, \partial P_\omega)/[\sum_{i \in \omega} F_i]$$
соответствует $\widetilde{H}^{n-k-1}(K^\omega)$.

4. Умножение
$$\widehat{H}_{n-k_1}(P_{\omega_1}, \partial P_{\omega_1}) \times \widehat{H}_{n-k_2}(P_{\omega_2}, \partial P_{\omega_2}) \to \widehat{H}_{n-k_1-k_2}(P_{\omega_1 \sqcup \omega_2}, \partial P_{\omega_1 \sqcup \omega_2})$$
с точностью до знака задаётся пересечением граней.

16 Двойственность Александера, биградуированные числа Бетти, трёхмерный случай

16.1 Двойственность Александера [20, 14]

Имеем $\partial P \simeq S^{n-1}$ и $\partial P \setminus P_\omega = \operatorname{int} P_{[m] \setminus \omega}$, поэтому двойственность Александера $\widetilde{H}_i(S^{n-1} \setminus K) \simeq \widetilde{H}^{n-i-2}(K)$ для компактного, локально стягиваемого, непустого собственного подмножества $K \subset S^{n-1}$ (см. [20, Corollary 3.45]) влечёт

$$\begin{aligned} H^{-i,2\omega}(\mathcal{Z}_P) &\simeq \widetilde{H}^{|\omega|-i-1}(P_\omega) \simeq \widetilde{H}_{n-2-(|\omega|-i-1)}(\operatorname{int} P_{[m]\setminus\omega}) = \widetilde{H}_{n+i-1-|\omega|}(\operatorname{int} P_{[m]\setminus\omega}) = \\ &= \widetilde{H}_{n+i-1-|\omega|}(P_{[m]\setminus\omega}) = \widetilde{H}_{m-|\omega|-(m-n-i)-1}(P_{[m]\setminus\omega}) \simeq H_{-(m-n-i),2([m]\setminus\omega)}(\mathcal{Z}_P). \end{aligned}$$

16.2 Биградуированные числа Бетти момент-угол многообразий

Задача 64. *Доказать, что*
$$(1-t^2)^{m-n}(h_0 + h_1 t^2 + \cdots + h_n t^{2n}) = \sum_{-i,2j} (-1)^i \beta^{-i,2j} t^{2j},$$
где $h_0 + h_1 t + \cdots + h_n t^n = (t-1)^n + f_{n-1}(t-1)^{n-1} + \cdots + f_0$.

16.3 $H^k(\mathcal{Z}_P)$ для $k = 0, 1, 2, 3$.

$$H^3(\mathcal{Z}_P) = \bigoplus_{F_i \cap F_j = \varnothing} \mathbb{Z}$$

16.4 Описание $H^{-1,2\omega}(\mathcal{Z}_P)$.

Задача 65. *Доказать, что*

$$\widetilde{H}^{|\omega|-2}(K_\omega) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & K_\omega = \partial\Delta^{|\omega|-1}; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$H^{-1,2*}(\mathcal{Z}_P) = \bigoplus_{\omega - \text{ недостающая грань в } K_P} \mathbb{Z},$$

где недостающей гранью называется подмножество $\omega \subset [m]$, такое что само оно не принадлежит K_P, но любое его собственное подмножество принадлежит K_P:

$$\omega \notin K_P, \omega \setminus \{j\} \in K_P \quad \forall j \in \omega.$$

17 Знаки при умножении в кольце $\mathcal{Z}_P$ для трёхмерного многогранника

17.1 Описание нетривиального умножения в формуле Хохстера

1. $\widetilde{H}^{-1}(P_\varnothing) \otimes \widetilde{H}^k(P_\omega) \to \widetilde{H}^k(P_\omega)$. Это отображение отвечает умножению на скаляры.
2. $\widetilde{H}^0(P_\omega) \otimes \widetilde{H}^1(P_{[m]\setminus\omega}) \to \widetilde{H}^2(\partial P)$. Это отображение отвечает спариванию из двойственности Пуанкаре.
3. $\widetilde{H}^0(P_{\omega_1}) \otimes \widetilde{H}^0(P_{\omega_2}) \to \widetilde{H}^1(P_{\omega_1 \sqcup \omega_2})$. Это отвечает отображению

$$\widehat{H}_2(P_{\omega_1}, \partial P_{\omega_1}) \otimes \widehat{H}_2(P_{\omega_2}, \partial P_{\omega_2}) \to H_1(P_{\omega_1 \sqcup \omega_2}, \partial P_{\omega_1 \sqcup \omega_2}).$$

Задача 66. *Вычислить кольцо когомологий $\mathcal{Z}_P$, где P – трёхмерная призма со срезанной вершиной.*

Задача 67. *Вычислить кольцо когомологий $\mathcal{Z}_P$, где P – куб с двумя срезанными несмежными ортогональными гранями.*

18 Семейства трёхмерных многогранников и гиперболическая геометрия

18.1 Семейства многогранников

Определение 18.1. Назовем *k-поясом* циклическую последовательность граней, в которой смежными являются последовательные грани и только они и никакие 3 грани не имеют общей вершины. Простой многогранник, отличный от *симплекса* Δ^3, является *циклически k-рёберно-связным* (для краткости ck-связным), если у него нет l-поясов, $l < k$, и *сильно ck-связным (c^*k-связным)*, если, кроме того, любой его k-пояс окружает грань. По определению Δ^3 является c^*3-связным, но не $c4$-связным.

Понятие ck-связности можно извлечь из работ начала XX века по проблеме 4 красок. В работах середины XX века его определение использует циклические рёберные разрезы графа многогранника. Мы используем эквивалентное определение в терминах поясов.

Задача 68. *Назовём циклическим k-рёберным-разрезом графа G набор его рёбер, такой что после удаления этого набора хотя бы две компоненты связности содержат простые циклы. Доказать, что простой 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ является ck-связным тогда и только тогда, когда у него нет циклических l-рёберных-разрезов с $l < k$, и c^*k-связным, если, кроме этого, любой циклический k-рёберный разрез состоит из рёбер, пересекающих некоторую грань по вершине.*

Все простые многогранники (семейство $\mathcal{P}_s$) являются $c3$-связными. Получаем цепочку вложенных семейств:

$$\mathcal{P}_s \supset \mathcal{P}_{aflag} \supset \mathcal{P}_{flag} \supset \mathcal{P}_{aPog} \supset \mathcal{P}_{Pog} \supset \mathcal{P}_{Pog^*}$$

Семейство $c4$-связных многогранников мы обозначаем $\mathcal{P}_{flag}$, так как оно совпадает с семейством *флаговых* многогранников, у которых любой набор попарно смежных граней имеет непустое пересечение. Каждая грань флагового многогранника окружена поясом. Из формулы Эйлера вытекает, что каждый простой многогранник должен иметь грань, которая является 3-, 4- или 5-угольником. Поэтому он не может быть более чем c^*5-связным. Семейство c^*3-связных многогранников мы называем *почти флаговыми* многогранниками и обозначаем $\mathcal{P}_{aflag}$. Благодаря результатам А.В. Погорелова [9] и Е.М. Андреева [1] $c5$-связные многогранники (семейство $\mathcal{P}_{Pog}$) являются в точности многогранниками, реализуемыми в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^3$ в виде ограниченных многогранников с прямыми двугранными углами. Такая реализация единственна с точностью до изометрии. Они получили название *многогранников Погорелова*, так как именно таким многогранникам посвящена работа [9]. Из работы [1] вытекает, что флаговые многогранники отвечают многогранникам с одинаковыми нетупыми двугранными углами в $\mathbb{L}^3$. Пример многогранников Погорелова дают *k-бочки* (*многогранники Лёбелля* в терминологии А.Ю. Веснина [10, 11]). Их поверхность составлена из двух дисков, каждый из которых представляет собой k-угольник, окруженный поясом пятиугольников.

Задача 69. *Любой фуллерен является многогранником Погорелова.*

Семейство c^*4-связных многогранников $\mathcal{P}_{aPog}$ мы называем *почти погореловскими* многогранниками, а семейство c^*5-связных многогранников $\mathcal{P}_{Pog^*}$ – *сильно погореловскими.* В работе [13] Дж.Д. Биркгоф свёл проблему 4 красок к проблеме раскраски в 4 цвета граней многогранников из семейства, которое, как оказалось, совпадает с $\mathcal{P}_{Pog^*}$.

Задача 70. *Доказать, что комбинаторный простой 3-мерный многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда его можно получить из куба последовательностью операций срезки ребра и операций срезки пары смежных рёбер грани по крайней мере с 6 сторонами.*

Задача 71. *(*) Доказать, что комбинаторный простой 3-мерный многогранник является почти погореловским многогранником, отличным от куба и 5-угольной призмы тогда и только тогда, когда его можно получить из куба с тремя срезанными попарно ортогональными несмежными рёбрами последовательностью операций срезки ребра, не лежащего в 4-угольниках, и операций срезки пары смежных рёбер грани по крайней мере с 6 сторонами.*

Задача 72. *(*) Доказать, что любой почти погореловский многогранник, отличный от куба и 5-угольной призмы, можно получить срезкой дизъюнктного набора рёбер почти погореловского многогранника или куба с двумя срезанными несмежными ортогональными рёбрами, производящей все 4-угольники.*

Задача 73. *(**) Охарактеризовать почти погореловские многогранники, которые получается срезками дизъюнктных наборов рёбер многогранников Погорелова.*

18.2 Понятие о теореме Е.М. Андреева

Задача 74. *Доказать, что на плоскости Лобачевского существует k-угольник с прямыми углами тогда и только тогда, когда $k \geqslant 5$. Сколько существует прямоугольных пятиугольников?*

В работах [1, 2] k-пояс называется *k-угольным призматическим элементом.* Эти работы посвящены перечислению групп Коксетера. Приведем основной результат этих работ в удобном для нас виде. Рассмотрим модель Кэли-Клейна пространства Лобачевского $\mathbb{L}^3$ в шаре. Точками пространства $\mathbb{L}^3$ в этой модели являются внутренние точки евклидового шара, прямыми и плоскостями пространства $\mathbb{L}^3$ – пересечения евклидовых прямых и плоскостей с внутренностью шара. Точки, лежащие на граничной сфере шара, называются *бесконечно удаленными* (или *идеальными*, см. [11]). Вместе они образуют *абсолют. Многогранником* в $\mathbb{L}^3$ является пересечение евклидового многогранника с шаром. Если это пересечение целиком лежит во внутренности шара, то многогранник является ограниченным. Если же оно целиком лежит в замкнутом шаре, то многогранник имеет конечный объем. При этом некоторые его вершины могут быть бесконечно удаленными (идеальными).

Теорема 18.1 ([1, 2]). *Пусть $P \neq \Delta^3$ – комбинаторный 3-мерный многогранник, каждому ребру $F_i \cap F_j$ которого сопоставлено число $\varphi_{i,j} \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Он реализуется в пространстве $\mathbb{L}^3$ как многогранник конечного объема с двугранными углами $\varphi_{i,j}$ в ребрах $F_i \cap F_j$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1. *каждая вершина имеет валентность 3 или 4;*
2. *$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} \geqslant \pi$ для любой 3-валентной вершины $F_i \cap F_j \cap F_k$;*
3. *$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,l} + \varphi_{l,i} = 2\pi$ для любой 4-валентной вершины $F_i \cap F_j \cap F_k \cap F_l$, где грани перечислены в порядке обхода вершины;*
4. *$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,i} < \pi$ для любого 3-пояса (F_i, F_j, F_k);*
5. *$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} + \varphi_{k,l} + \varphi_{l,i} < 2\pi$ для любого 4-пояса (F_i, F_j, F_k, F_l).*
6. *если P – 3-угольная призма, то один из углов в ребрах оснований меньше $\frac{\pi}{2}$;*
7. *$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,k} < \pi$, если грани F_i и F_k пересекаются по вершине, причем каждая из них смежна с гранью F_j, не содержащую этой вершины.*

Пересечение многогранника с абсолютом состоит из 3-валентных вершин с суммой двугранных углов π и 4-валентных вершин с суммой двугранных углов 2π.

Реализация многогранника без вершин на абсолюте единственна с точностью до изометрии. Если все двугранные углы имеют вид $\frac{\pi}{k_{i,j}}$, где $k_{i,j}$ – натуральные числа, то реализация в виде многогранника конечного объёма также единственна.

Задача 75. *Доказать, что срезка вершин, лежащих на абсолюте, задаёт биекцию между множествами многогранников конечного объёма с прямыми двугранными углами в пространстве Лобачевского, определённых с точностью до изометрии, и почти погореловских многогранников, отличных от куба и пятиугольной призмы.*

18.3 Идеальные прямоугольные многогранники и теорема Кёбе-Андреева-Тёрстона

Медиальный граф $M(P)$ трёхмерного многогранника P – это граф, вершины которого взаимно однозначно отвечают рёбрам многогранника, а рёбра – парам рёбер, смежных в некоторой грани.

Задача 76. *Доказать, что медиальный граф любого трёхмерого многогранника также является графом некоторого трёхмерного многогранника.*

Задача 77. *Доказать, что медиальный граф любого трёхмерного многогранника является графом трёхмерного идеального прямоугольного многогранника. И наоборот, граф любого трёхмерного идеального прямоугольного многогранника является медиальным графом ровно для двух, возможно совпадающих, комбинаторных трёхмерных многогранников, причём эти многогранники двойственны друг другу.*

19 Когомологии момент-угол многообразий флаговых трёхмерных многогранников

19.1 Конструкция трёхмерных флаговых многогранников из куба при помощи срезок рёбер и пар смежных рёбер

Задача 78. *Доказать, что простой трёхмерный многогранник является флаговым тогда и только тогда, когда он получается из трёхмерного куба при помощи операций срезки ребра и срезки пары смежных рёбер грани по крайней мере с 6 сторонами одной плоскостью.*

19.2 Доказательство того факта, что

$$\widetilde{H}^1(P_\omega) = \sum_{\omega_1 \sqcup \omega_2 = \omega} \widetilde{H}^0(P_{\omega_1}) \cdot \widetilde{H}^0(P_{\omega_2}).$$

19.3 Пример вычисления кольца для $P = As^3$

20 B-жёсткость и C-жёсткость простых многогранников

21 Квазиторические многообразия и малые накрытия

21.1 Определения

Конструкция через характеристические функции.

21.2 Число Бухштабера $s(P)$

Определение 21.1. $s(P)$ – максимальная размерность торических подгрупп $T^k \simeq H \subset T^m$, действующих свободно на момент-угол многообразии $\mathcal{Z}_P$.

Задача 79. *Описать все простые многогранники, у которых $s(P) = 1$.*

21.3 Описание колец когомологий

Задача 80. *(*) На основе клеточного разбиения трёхмерного многогранника на грани описать*

1. *аддитивную структуру кольца когомологий над $\mathbb{Z}_2$ малого накрытия;*
2. *умножение в кольце*

22 B-жёсткость многогранников Погорелова

Задача 81. *Восстановить детали доказательства того, что всякий многогранник Погорелова является B-жёстким.*

Список литературы

[1] Е.М. Андреев, *О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского*, Матем. сб. 1970. Т. 81 (123), № 3. С. 445–478.

[2] Е.М. Андреев, *О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского*, Матем. сб. 1970. Т. 83 (125), № 2(10). С. 256–260.

[3] В.М. Бухштабер, *Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения.* Тр. МИАН, 263, МАИК, М., 2008, 18–43.

[4] В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, Т.Е. Панов, *Алгебра и комбинаторика выпуклых многогранников.* Приложение к книге Г. Циглера «Теория многогранников», 95 с., МЦНМО, 2014.

[5] В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.

[6] Э.Б. Винберг, *Курс алгебры.* М., Факториал Пресс, 2002.

[7] В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов, *Многогранники, графы, оптимизация.* М., Наука, 1981.

[8] Н.Ю. Ероховец, *Гипотеза Гала для нестоэдров, отвечающих полным двудольным графам*, Тр. МИАН, 266, МАИК, М., 2009, 127–139.

[9] А.В. Погорелов, *О правильном разбиении пространства Лобачевского*, Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.

[10] А.Ю. Веснин, *Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля*, Сиб. мат. журн. 1987. V. 28, N 5. P. 50–53.

[11] А.Ю. Веснин, *Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия*, УМН. 2017. Т.72, № 2(434). С. 147–190.

[12] Г. М. Циглер, *Теория многогранников*, М., МЦНМО, 2014.

[13] G.D. Birkhoff, *The Reducibility of Maps*, American Journal of Mathematics. 1913. V. 35, N 2. P. 115–128.

[14] F. Bosio, L. Meersseman, *Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes*, Acta Math., 197 (2006), 53–127, DOI: 10.1007/s11511-006-0008-2.

[15] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[16] V.M. Buchstaber, N.Yu. Erokhovets, *Fullerenes, Polytopes and Toric Topology*, Lecture Note Series, IMS, NUS, Singapore, 2017, arXiv:math.CO/160902949.

[17] V.M. Buchstaber, N.Yu. Erokhovets, *Combinatorics and toric topology of fullerenes and related families of polytopes*, Preprint.

[18] V. Eberhard, *Zur Morphologie der Polyheder*, Leipzig, 1891.

[19] B. Grünbaum, *Convex polytopes*, Graduate texts in Mathematics **221**, Springer-Verlag, New York, 2003.

[20] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, http://www.math.cornell.edu/?hatcher.

[21] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams. *Faces of generalized permutohedra*, arXiv: math/0609184v2.