Двойственность в алгебраической топологии

В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов, Н.Ю. Ероховец

Часть I
Осенний семестр. Двойственность в дифференциальной и комбинаторной топологии

1 Лекция 1. Комбинаторная двойственность Александера [1, 4].

1.1 Симплициальные комплексны: основные понятия

Абстрактный и геометрический симплициальный комплекс, линк и звезда симплекса. Двойственный комплекс

$$\widehat{K} = \{\sigma \subset [m] \colon [m] \setminus \sigma \notin K\}$$

1.2 Барицентрическое подразбиение и комбинаторная окрестность

Доказательство того, что для $K \neq \Delta^{m-1}$

$$(\widehat{K})' \simeq (\partial\Delta^{m-1})' \setminus \mathring{U}_{(\partial\Delta^{m-1})'}(K').$$

Задача 1. *Доказать гомотопическую эквивалентность для $K \neq \Delta^{m-1}$:*

$$(\partial\Delta^{m-1})' \setminus \mathring{U}_{(\partial\Delta^{m-1})'}(K') \sim (\partial\Delta^{m-1})' \setminus K'.$$

Возможно, будет полезно барицентрическое вложение $K' \subset I^m$:

$$v_\sigma \to (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m), \varepsilon_i = \begin{cases} 0, i \in \sigma; \\ 1, i \notin \sigma \end{cases}.$$

1.3 Теорема двойственности

Для $K \neq \Delta^{m-1}$
$$\widetilde{H}_i(K) \simeq \widetilde{H}^{m-3-i}(\widehat{K}).$$

Задача 2. *Доказать, что для $K \neq \Delta^{m-1}$ и симплекса $\sigma \in \widehat{K}$ выполнено*
$$\widetilde{H}_i(K_{\widehat{\sigma}}) \simeq \widetilde{H}^{m-3-i-|\sigma|}(\mathrm{link}_{\widehat{K}}\sigma),$$
где $\widehat{\sigma} = [m] \setminus \sigma$ и K_ω – полный подкомплекс, индуцированный на множество $\omega \subset [m]$.

Задача 3. *Пусть C – клеточный подкомплекс в границе выпуклого n-многогранника P. Определим двойственный комплекс C^* в границе двойственного многогранника P^* как $G \notin C \Leftrightarrow G^\Delta \in C^*$, где для i-мерной грани G многогранника P через G^Δ обозначена соответствующая ей $(n-1-i)$-мерная грань двойственного многогранника P^*. Доказать, что*
$$\widetilde{H}_i(C) \simeq \widetilde{H}^{n-2-i}(\widehat{C}).$$

2 Лекция 2. Основные понятия алгебраической топологии.

2.1 Симплициальные гомологии и когомологии.

Абстрактный симплициальный комплекс. Геометрический симплициалный комплекс. Теорема Понтрягина: любой абстрактный симплициальный комплекс размерности n можно реализовать в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. книгу Понтрягина).

Ориентированный q-мерный симплекс σ: $I = \{i_1, \ldots, i_{q+1}\}$+класс эквивалентности упорядочиваний множества I, где два упорядочивания эквивалентны, если отличаются на чётную перестановку.
$$[235] \sim [532] \sim [352] \not\sim [325]$$

$[I]$ – класс эквивалентности упорядочиваний.

$\mathbb{K}$ – основное кольцо с единицей (обычно $\mathbb{Z}$ или поле).

Определим $C_q(K, \mathbb{K})$ – свободный $\mathbb{K}$-модуль с базисом из ориентированных симплексов/ соотношения $\sigma + \overline{\sigma} = 0$, где $\overline{\sigma}$ – симплекс с противоположный ориентацией.
$$\mathrm{rk}\, C_q(K, \mathbb{K}) = f_q(K) \text{ – число } q\text{-мерных симплексов}, C_q(K, \mathbb{K}) = 0 \text{ при } q < 0.$$

Граничное отображение
$$\partial_q C_q(K, \mathbb{K}) \to C_{q-1}(K, \mathbb{K})\colon \partial_q[i_1, \ldots, i_{q+1}] = \sum_{j=1}^{q+1} (-1)^{j-1}[i_1, \ldots, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{q+1}]$$

Упражнение 1. $\partial_q \partial_{q+1} = 0$.

$$C_*(K,\mathbb{K}) = \{C_q(K,\mathbb{K}), \partial_q\}$$

$$H_q(K,\mathbb{K}) = Ker\,[\partial_q\colon C_q(K) \to C_{q-1}(K)]\,/Im\,[\partial_{q+1}\colon C_{q+1}(K) \to C_q(K)]$$

q-ая группа симплициальных гомологий с коэффициентами в $\mathbb{K}$.

Эйлерова характеристика

$$\chi(K) = \sum_{q\geqslant 0}(-1)^q \mathrm{rk}\, H_q(K,\mathbb{K})$$

Упражнение 2.

$$\chi(K) = \sum_{q\geqslant 0}(-1)^q \mathrm{rk}\, C_q(K,\mathbb{K}) = f_0 - f_1 + f_2 - \dots$$

Как следствие, $\chi(K)$ не зависит от $\mathbb{K}$.

Определение 2.1. K называется *триангуляцией* (симплициальным разбиением) топологического пространства X, если $|K| \simeq X$ (гомеоморфно).

Упражнение 3. *Граница симплекса $\partial\Delta^n$ – триангуляция сферы S^{n-1}, где $\Delta^n = 2^{[n+1]}$ – все подмножества в $[n+1]$. Найти $H_q(\partial\Delta^{n+1},\mathbb{Z})$.*

Для $n=2$ есть негрань $[123]$. Её граница состоит из граней: «$\partial_2[123]$»$=[23]-[13]+[12]$ – образующая в группе 1-мерных гомологий.

Упражнение 4. *Рассмотрим триангуляции тора: стороны на 3 части, квадраты побочной диагональю на две части. $(f_0, f_1, f_2) = (9, 27, 18)$. Также можно нарисовать минимальную триангуляцию, имеющую только 7 вершин, $(f_0, f_1, f_2) = (7, 21, 14)$. Построить триангуляцию и доказать, что она минимальная по числу вершин. $\chi(T^2) = 0$.*

Упражнение 5. *Граница икосаэдра даёт триангуляцию проективной плоскости при факторизации. $(f_0, f_2, f_2) = (6, 15, 10)$. Посчитать гомологии $H_*(\mathbb{R}P^2,\mathbb{K})$ для $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Q}$.*

Бывают «полусимплициальные» разбиения (один из вариантов представлен в [3]). Это снижает число вершин. Окружность можно триангулировать с одним или двумя 1-мерными симплексами. Тор можно разбить на два треугольника (при этом вершина получается одна). Тогда

$$H_0(T^2) = \mathbb{Z};\quad H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2;\quad H_2(T^2) = \mathbb{Z}.$$

Упражнение 6. *Аналогично для бутыли Клейна.*

Если учитывать $\varnothing \in K$, то естественно считать, что $\dim\varnothing = -1$.

$$\widetilde{C}_{-1}(K) = \mathbb{Z}\langle[\varnothing]\rangle \simeq \mathbb{Z}, \partial_0[i] = [\varnothing]$$

Получается аугментированный комплекс. Его гомологии обозначаются $\widetilde{H}_i(K)$. При этом если $K \neq \varnothing$, то $H_i(K) = \widetilde{H}_i(K)$, если $i > 0$, и $H_0(K) = \widetilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$. Также $\widetilde{H}^{-1}(\varnothing, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Когомологии.

$$C^q(K, \mathbb{K}) = Hom_{\mathbb{K}}(C_q(K, \mathbb{K}), \mathbb{K})$$

Возникает коцепной комплекс. Состоит из групп и гомоморфизмов d_q, двойственных к ∂_{q+1}.

$$d_q \colon C^q(K, \mathbb{K}) \to C^{q+1}(K, \mathbb{K}), d_q = \partial^*_{q+1}.$$

В книге Дольда есть знак, так что $\langle d_q\alpha, [I]\rangle = (-1)^q \langle \alpha, \partial_{q+1}[I]\rangle$, $\alpha \in C^q(K, \mathbb{K})$, $[I] \in C_{q+1}(K, \mathbb{K})$.

d_q – кограничное отображение (или коцепной дифференциал).

$C^q(K, \mathbb{K})$ – свободный $\mathbb{K}$-модуль с базисом $\alpha_I \colon \langle \alpha_I, [J]\rangle = \delta_{I,J}$, если $J \neq [\overline{I}]$.

На базисе имеем:

$$d\alpha_I = \sum_{j \in [m] \setminus I \colon j \cup I \in K} (-1)^{l(j,I)} \alpha_{j \cup I},$$

где $l(j, I) = \#\{i \in I \colon i < j\}$.

Группа когомологий $H^q(K, \mathbb{K}) = Ker\ d_q / Im\ d_{q-1}$. Также рассматривается аугментрованный комплекс и приведённые когомологии.

Симплициальные гомологии и когомологии – жёсткая конструкция. Чтобы посчитать гомологии пространства, нужно его триангулировать. Однако триангуляций много. Их можно переводить одну в другую про помощи операций. Например, звёздные подразбиения. Есть теорема Александера, которая примерно говорит, что применяя звёздные подразбиения и обратные к ним операции, можно получить из двух триангуляций одну и ту же. Гомеоморфизмы, которые получаются измельчениями триангуляций, – кусочно-линейные гомеоморфизмы. В общем случае у двух триангуляций не всегда есть общее измельчение.

Другой способ – сингулярные гомологии.

2.2 Сингулярные гомологии и когомологии

Сразу для топологических пространств.

Пусть X – топологическое пространство. Непрерывные отображения из стандартного симплекса Δ^q (с фиксированным порядком вершин) – сингулярный симплекс («сингулярный» значит, что может иметь любые особенности).

$C_q(X, \mathbb{K})$ – свободный $\mathbb{K}$-модуль, порождённый всеми q-мерными сингулярными симплексами. Огромная группа. Дальше определяется ограничение на грань.

$$\partial_q f = \sum (-1)^{i-1} f\ |_{i\text{-ая грань}}.$$

3 Лекция 3. Сингулярные гомологии и когомологии

X – топологическое пространство, $\Delta^n = [v_0, \ldots, v_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – стандартный n-симплекс. Непрерывное отображение $\sigma\colon \Delta^n \to X$ называется *сингулярным симплексом.*

$C_n(X) = \{\sum\limits_{i=1}^{N} k_i\sigma_i, k_i \in \mathbb{Z}\}$ – свободная абелева группа, порождённая сингулярными симплексами в X.

$\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$, $\partial_n\sigma = \sum\limits_i (-1)^i\sigma\mid_{[v_0,\ldots,\widehat{v_i},\ldots,v_n]}$, где каждая грань отождетвляется с симплексом Δ^{n-1} за счёт порядка вершин.

$\partial = \partial_n$, $\partial_n\partial_{n+1} = 0$, $\partial^2 = 0$.

$H_n(X) = Ker\ \partial_n / Im\ \partial_{n+1}$ – группа сингулярных гомологий пространства X.

Утверждение 3.1. *Если $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$, то $H_n(X) = \oplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Аугментированный комплекс: $\varepsilon\colon C_0(X) \to \mathbb{Z}$, $\varepsilon(\sum_i k_i\sigma_i) = \sum_i k_i$. $\sigma_i\colon \Delta^0 \to X$.

$$H_0(X) \simeq \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Утверждение 3.2. *Если X линейно связно, то $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$, $\widetilde{H}_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Аксиома 1. Гомологии точки

Утверждение 3.3 (Гомологии точки). *Если $X = pt$, то $X_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0; \\ 0, & n > 0. \end{cases}$*

Аксиома 2. Гомотопическая инвариантность.

Отображение пространств $f\colon X \to Y$ индуцирует отображение групп гомологий $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$. $f_\#\colon C_n(X) \to C_n(Y)$, $(\sigma\colon \Delta^n \to X) \to (f_\#(\sigma) = f\circ\sigma\colon \Delta^n \to X)$. Тогда $f_\#\partial = \partial f_\#$, то есть $f_\#\colon (C.(X), \partial) \to (C.(X), \partial)$ – отображение цепных комплексов.

Утверждение 3.4. *Отображение $f_\#$ индуцирует гомоморфизм $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$, причём $(fg)_* = f_*g_*$.*

Вывод: $H_n\colon Top \to Gr$ – (ковариантный) функтор из категории топологических пространств в категорию абелевых групп.

Следствие 3.1. *Если X и Y гомеоморфны, то их группы гомологий изоморфны.*

Более общее утверждение.

Теорема 3.1 (гомотопическая инвариантности сингулярных гомологий). *Если отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то $f_* = g_*$.*

Доказывается с помощью понятия цепной гомотопии цепных комплексов.

$f_\#, g_\#\colon (C., \partial) \to (C'., \partial)$ называются *цепно гомотопными*, если существует отображение $P_n\colon C_n \to C'_{n+1}$, такое что $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$.

Утверждение 3.5. *Если $f_\#$ и $g_\#$ цепно гомотопны, то $f_* = g_*$.*

Для доказательства теоремы нужно построить цепную гомотопию $P\colon C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ между $f_\#$ и $g_\#$.

Есть отображение призмы $I \times \Delta^n \to X \times I \to Y$. Тогда

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F \circ (\sigma \times id) \mid_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]},$$

где v_i – вершины нижнего основания, а w_j – верхнего.

Тогда $\partial P = g_\# - f_\# - P\partial$: граница призмы = два основания и боковая поверхность.

Упражнение 7. *Проверить это равенство.*

Следствие 3.2. *Если пространства гомотопически эквивалентны, то их группы гомологий изоморфны.*

Следствие 3.3. *Если пространства X стягиваемо, то $\widetilde{H}_n(X) = 0$ для всех n.*

Аксиома 3. Точная последовательность пары.

Относительные группы гомологий. $A \subset X$ – подпространство. (X, A) – (топологическая) пара. $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$. $\partial\colon C_n(X, A) \to C_{n-1}(X, A)$.

$H_n(X, A) = Ker\ \partial_n / Im\ \partial_{n+1}$.

$\alpha \in H_n(X, A)$ представлен относительным циклом: $\alpha \in C_n(X)$, таким что $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$. Относительная граница: $\alpha = \partial\beta + \gamma$, где $\gamma \in C_n(A)$.

Теорема 3.2 (точная последовательность пары)**.** *Короткая точная последовательность цепных комплексов*

$$0 \to C.(A) \to C.(X) \to C.(X, A) \to 0$$

индуцирует длинную точную последовательность в гомологиях:

$$\dots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to \dots$$

где $H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ устроено так: $\partial[\alpha] = [\partial\alpha]$, $\partial\alpha \in C_{n-1}(A)$.

Аксиома 4. Аксиома вырезания.

$H_n(X, \varnothing) = H_n(X)$. Для "хороших пар"$(X, A)$ выполнено $H_n(X, A) \simeq \widetilde{H}_n(X/A)$.

Теорема 3.3 (свойство вырезания)**.** *Пусть $Z \subset A \subset X$, причём $\overline{Z} \subset \mathrm{int}\ A$. Тогда включение $(X \setminus Z, A \setminus Z) \subset (X, A)$ индуцирует изоморфзим*

$$H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \simeq H_n(X, A).$$

Удобно доказывать в другой формулировке.

Теорема 3.4 (свойство вырезания)**.** *Пусть* $A, B \subset X$, *причём* $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. *Тогда*

$$H_n(B, A \cap B) \simeq H_n(X, A).$$

Эквивалентность: $B = X \setminus Z$, $Z = X \setminus Z$.

Следствие 3.4. $\widetilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X, A)$, *где* CA *– конус над пространством* A.

Доказательство. $\widetilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X \cup CA, CA) \simeq H_n(X \cup CA \setminus \{v\}, CA \setminus \{v\}) \simeq H_n(X, A)$. □

Хорошая пара – корасслоение: $A \subset X$ удовлетворяет свойству продолжения гомотопии. Например, клеточные пары, A – абсолютный окрестностый ретракт – окрестность деформацинно ретрагируется на A.

Утверждение 3.6. *Если* $A \subset X$ *– корасслоение, то отображение*

$$(X, A) \to (X/A, A/A) = (X/A, pt)$$

индуцирует изоморфизм:

$$q_* \colon H_n(X, A) \to H_n(X/A, pt) \simeq \widetilde{H}_n(X/A).$$

Доказательство. Если пара хорошая, то $X \cup CA \to (X \cup CA)/CA = X/A$ – гомотопическая эквивалентность. □

4 Лекция 4. Эквивалентность сингулярных и симплициальных гомологий.

Теорема 4.1. *Пусть* $X = A \cup B$, *так что* $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. *Тогда* $H_q(B, A \cap B) \simeq H_q(X, A)$.

Доказательство. Идея: для сингулярных гомологий достаточно брать «маленькие» симплексы. В каком смысле «маленький»? Как правило, симплекс захватывает оба множества. Обозначим $C_n(A+B)$ – суммы цепей в A и цепей в B. Если заменить $C_n(X)$ на эту группу, то теорема будет доказываться «в два счёта». Есть отображение

$$C_n(A+B)/C_n(A) \to C_n(X)/C_n(A)$$

Нужно доказать, что оно индуцирует изоморфизм гомологий: $H_n^{A+B}(X, A) \simeq H_n(X, A)$. Имеем: $C_n(A+B)/C_n(A) \simeq C_n(B)/C_n(A \cap B)$ – обе абелевы группы свободны и имеют одинаковый набор образующих. Пусть есть покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}$ пространства X: $X = \cup_i \operatorname{int} U_i$. Обозначим через $C_n^{\mathcal{U}} \subset C_n(X)$ множество линейных комбинаций симплексов, отображающихся в множества покрытия: $\{\sum n_i \sigma_i, \sigma_i(\Delta^n) \subset U_k$ для нек $k\}$. Это цепной подкомплекс: $\partial_n C_n^{\mathcal{U}}(X) \subset C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$. Гомологии обозначим $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Лемма 4.1. *$i\colon C_n^{\mathcal{U}}(C) \to C_n(X)$ является цепной гомотопической эквивалентностью, то есть сущесвует $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$, что $i\rho$ и ρi цепно гомотопны тождественным отображениям. В частности, гомологии эквивалентны.*

Доказательство. Нужно построить оператор барицентрического подразбиения и оператор цепной гомотопии. Оператор барицентрического подразбиения – сумма симплексов барицентрического подразбиения со знаками. Тогда можно сделать симплексы сколь угодно малыми. Пусть $\sigma\colon [v_0, \dots, v_n] \to X$. Если $w_i \in [v_0, \dots, v_n]$ – точки, то положим $b_\sigma([w_0, \dots, w_k]) = [b, w_0, \dots, w_k]$. Тогда $\partial b_\sigma + b_\sigma \partial = id$. Определим $S\colon C_n(X) \to C_n(X)$ по правилу: $S\sigma = b_\sigma S \partial \sigma$, где $S = id\colon C_0(X) \to C_0(X)$.

Тогда S цепно гомотопно $id\colon C_n(X) \to C_n(X)$. Доказательство заключается в построении $T\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$, так что $T\partial + \partial T = id - S$.

Для $n = 0$ положим $T\sigma = b_\sigma \sigma$ (вырожденный) 1-мерный симплекс в $\sigma(v_0)$.

Дальше по индукции $T\sigma = b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)$. Призму проектируем на основание.

$T\sigma\colon \Delta^n \times I \to \Delta^n \to X$. Дальше нужно проверить формулы:

$$\partial T\sigma = (id - T\partial - S)\sigma.$$

Граница триангулированной призмы состоит из трёх частей.

Дальше нужно применить операцию барицентрического подразбиения много раз:

$$S^m\colon C_n(X) \to C_n(X).$$

Тогда $\forall \sigma\colon \Delta^n \to X\ \exists m\colon S^m\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. Число m зависит от симплекса и не может быть выбрано одним для всех симплексов.

$$D_m = \sum_{0 \leqslant i < m} TS^i \text{ – цепная гомотопия между } id \text{ и } S^m$$

При этом $\partial D_m + D_m \partial = id - S^m$. Определим $m(\sigma)$ – наименьшее m, для которого $S^m\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$. $D\colon C_n(X) \to C_{n+1}(X)$, $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$. Имеем

$$\partial D_{m(\sigma)} + D_{m(\sigma)}\partial\sigma = \sigma - S^{m(\sigma)}\sigma$$

Тогда $\partial D_{m(\sigma)}\sigma = \partial D\sigma$, но $D_{m(\sigma)}\partial\sigma$ не обязательно равно $D\partial\sigma$. Определим $\rho\colon C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$:

$$\rho(\sigma) = S^{m(\sigma)}\sigma + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma.$$

Тогда $\partial D\sigma + D\partial\sigma = \sigma - \rho(\sigma)$. □

□

Утверждение 4.1. $\widetilde{H}_i(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n; \\ 0, & i \neq n \end{cases}.$

Доказательство. Нужно использовать длинную точную последовательности пары (D^n, S^{n-1}) и соотношение $D^n/S^{n-1} = S^n$. □

Теорема 4.2. $\widetilde{H}_i(\Sigma X) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(X)$.

Доказательство. Рассмотрим пару (CX, X). Тогда $X \simeq CX$ – корасслоение для любого X и $CX/X \simeq \Sigma X$. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть есть набор пар (X_α, x_α), где каждое вложение точки $x_\alpha \subset X_\alpha$ – корасслоение. Тогда*

$$\widetilde{H}_n(\vee_\alpha X_\alpha) = \oplus_\alpha \widetilde{H}_n(X_\alpha), \quad n \geqslant 0.$$

Доказательство. $\vee_\alpha X_\alpha = \sqcup_\alpha X_\alpha / \sqcup_\alpha x_\alpha$. $\square$

Теорема 4.4 («инвариантность размерности»)**.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ – открыты и $U \simeq V$ гомеоморыны. Тогда $m = n$.*

Доказательство. $\forall x \in U$

$$H_i(U, U \setminus \{x\}) \simeq H_i(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \simeq \widetilde{H}_{i-1}(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = m, \\ 0, & i \neq m \end{cases}$$

$\square$

Теорема 4.5 (Точная последовательность Майера-Вьеториса)**.** *Пусть $A, B \subset X$, так что* $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B = X$. *Тогда есть точная последовательность*

$$\to H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B) \to \cdots \to H_0(X) \to 0$$

Доказательство. Есть точная последовательность комплексов

$$0 \to C_n(A \cap B) \to C_n(A) \oplus C_n(B) \to C_n(A + B) \to 0 : x \to (-x, x),\ (x, y) \to x + y.$$

Из неё следует существование длинной точной последовательности. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть (X, A) – симплициальный комплекс и подкомплекс. Тогда вложение $\Delta_n(X, A) \to C_n(X, A)$ индуцирует изоморфизм гомологий, где $\Delta_n(X, A)$ – симплициальные цепи пары.*

Доказательство. Пусть X конечномерен и $A = \varnothing$. Рассмотрим X^k – k-мерный остов.

$$\to H^\Delta_{n+1}(X^k, X^{k-1}) \to H^\Delta_n(X^{k-1}) \to H^\Delta_n(X^k) \to H_n(X^k, X^{k-1}) \to H^\Delta_{n-1}(X^{k-1}) \to$$

отобразим в такую же последовательность для сингулярных гомологий. Тогда результат следует индукцией по размерности k при помощи леммы о пяти гомоморфизмах.

Для бесконечного комплекса нужно пользоваться компактностью. Для $A \neq \varnothing$ нужно использовать ещё одну точную последовательность – пары (X, A). Далее воспользоваться леммой о пяти гомоморфизмах. $\square$

5 Лекция 5. Клеточные гомологии и сингулярные когомологии.

5.1 Клеточные гомологии.

Клеточное пространство – объединение клеток с двумя аксиомами. Для каждой клетки зафиксированно отображение. В частности, задана ориентация.

X – клеточное пространство. $X^n = sk^n X$ – n-мерный остов (объединение клеток размерности не более n). Внутренности симплексов образуют клеточное разбиение для симплициального комплекса.

$C_n(X)$ – клеточные цепи – формальные линейные комбинации клеток.

$\partial^c \colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ – граничное отображение.

$C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$. Тогда клеточный граничный гомоморфизм – отображение длинной точной последовательности тройки.

Лемма 5.1. *1.* $H_k(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ \textit{свободная абелева группа с базисом из } n\textit{-клеток}, & k = n. \end{cases}$

2. $H_k(X^n) = 0$ *при* $k > n$.

3. пусть $i \colon X^n \to X$ *– вложение. Тогда* $i_* \colon H_k(X^n) \to H_k(X)$ *– изоморфизм при* $k < n$.

Доказательство. Идея:

1. $X^{n-1} \subset X^n$ – корасслоение, поэтому $H_k(X^n, X^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) = \widetilde{H}_k(\vee S^n)$. Биективное непрерывное отображение компактного пространства на хаусдорфово – гомеоморфизм.

2. Следует из длинной точной последовательности пары по индукции:

$$\dots \to H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \to H_k(X^{n-1}) \to H_k(X^n) \to H_k(X^n, X^{n-1}) \to$$

$k \neq n, n-1 \Rightarrow H_k(X^{n-1}) = H_k(X^n)$. $k > n$ $H_k(X^n) = H_k(X^{n-1}) = \dots = H_k(X^0)$.

3. $k < n$: $H_k(X^n) = H_k(X^{n+1}) = \dots = H_k(X^{n+2}) = \dots$

□

Упражнение 8 (Точная последовательность тройки)**.** $B \subset A \subset X$. *Тогда имеется длинная точная последовательность:*

$$\to H_n(A, B) \to H_n(X, B) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B) \to \dots$$

где $H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(A, B)$ *– композиция.*

Граничное отображение: $H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$.

Квадрат равен нулю:

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}) \to H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \to H_{n-2}(X^{n-2}) \to H_{n-2}(X^{n-2}, X^{n-3}).$$

$C. = \{C_n(X), \partial_n^c\}$ – клеточный цепной комплекс. $\mathcal{H}_n$ – клеточные гомологии.

Теорема 5.1. *Клеточные гомологии совпадают с сингулярными. Изоморфизм функториален относительно клеточных отображений.*

Для доказательства предыдущую диаграмму нужно достроить.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 = H_n(X^{n-1}) \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) = H_n(X) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur] & \\
 & & H_{n-1}(X^{n-2}) = 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Следствие 5.1. *Если X имеет k клеток размерности n, то $H_n(X)$ порождена не более, чем k элементами. В частности, если нет клеток размерности n, то $H_n(X) = 0$.*

Следствие 5.2. *Если в X нет пар клеток в соседних размерностях (например, если X имеет только клетки чётной размерности), то $H_n(X)$ – свободная абелева группа, порождённая n-клетками.*

Пример 5.1. $H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2, 4, \ldots, 2n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Теорема 5.2. *При $n > 1$ имеем $\partial^c(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1}$, где $d_{\alpha\beta}$ – степень отображения $f_{\alpha\beta} = q_\beta \circ \varphi_\alpha$:*

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f_{\alpha\beta}"'] & X^{n-1} \arrow[r, "q_\beta"] & S^{n-1}
\end{tikzcd}$$

Здесь φ_α – приклеивающее отображение и $q_\beta \colon X^n \to X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \simeq S^{n-1}$.

Упражнение 9. *Найти гомологии двумерных поверхностей.*

Упражнение 10. *Найти гомологии пространства $\mathbb{R}P^n$ с коэффициентами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$.*

5.2 Кольцо когомологий

Коцепи – функции из цепного комплекса в кольцо коэффициентов.

$C^n(X;G) = Hom(C_n(X), G)$ – сингулярные коцепи.

$\partial_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ – граничный гомоморфизм. $\sigma\colon \Delta^n \to X$.

$\partial_n \sigma = \sum_i (-1)^i \sigma \mid_{[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n]}$.

$d_{n-1}\colon C^{n-1}(X) \to C^n(X)$ – кограничный гомоморфизм.

$\langle d_{n-1}c, \sigma\rangle\colon = \langle c, \partial_n \sigma\rangle$. Иногда пишут знак $(-1)^{n-1}$. Мы не будем писать.

$c \in C^{n-1}(X)$, $\sigma\colon \Delta^n \to X$, $\sigma \in C_n(X)$.

$d_{n-1}c(\sigma) = \sum_i (-1)^i c(\sigma \mid_{[v_0,\dots,\widehat{v_i},\dots,v_n]})$.

$\partial_n \partial_{n+1} = 0 \Rightarrow d_n d_{n-1} = 0$.

$$H^n(X;G) = Ker\ d_n / Im\ d_{n-1}.$$

$X \to Y \Rightarrow H^k(Y) \to H^k(X)$.

Вообще говоря, $H^k(X,H) \neq Hom(H_k(X), G)$. Есть дополнительное прямое слагаемое $Ext(H_{k-1}(X), G)$.

Есть существенная разница для бесконечных пространств.

Теорема 5.3. *Пусть (X_α, x_α) – набор прсостранств, для каждого из которых вложение точки – корасслоение. Тогда*

$$\widetilde{H}^n(\vee_\alpha X_\alpha) \simeq \prod_\alpha \widetilde{H}^n(X_\alpha)$$

$$Hom(\oplus_\alpha G_\alpha, H) \simeq \prod_\alpha Hom(G_\alpha, H).$$

Структура кольца:

R – коммутативное кольцо с единицей (как правило, $\mathbb{Z}$ или поле).

Определим $\cup\colon H^p(X;R) \times H^q(X,R) \to H^{p+q}(X;R)$ так что $H^*(X;R) = \oplus_{p\geqslant 0} H^p(X;R)$ – ассоциативное градуированно коммутативное кольцо с единицей.

Определение: для коцепей $a \in C^p(X;R), b \in C^q(X,R) \to a \cup b \in C^{p+q}(X;R)$. Положим для $\sigma\colon [v_0,\dots,v_{p+q}] \to X$

$$a \cup b(\sigma) = a(\sigma \mid_{[v_0,\dots,v_p]}) \cdot b(\sigma \mid_{[v_p,\dots,v_{p+q}]}).$$

В 30-е годы в разных вариантах придумали 4 автора: Александер, Колмогоров, Уитни, Чех(?).

Лемма 5.2. $d(a \cup b) = (da) \cup b + (-1)^p a \cup (db), \quad a \in C^p(X,R).$

Градуированнное кольцо $A = \oplus_{i\geqslant 0} A^i$ – подгруппы, $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

Градуированно коммутативно: $ab = (-1)^{ij} ba$.

Теорема 5.4. *$H^*(X,R) = \oplus_{p\geqslant 0} H^p(X,R)$ – ассоциативное градуированно коммутативная R-алгебра с единицей.*

Идея доказателства. Произведение коциклов – коцикл. Произведение коцикла и кограницы – кограница. Поэтому определено умножение

$$\cup\colon H^p(X,R)\times H^q(X,R)\to H^{p+q}(X,R)$$

Оно ассоциативно, с единицей $1\in H^0(X,R)$ – постоянное отображение. Нетривиальная часть – градуированная коммутативность. При перестановке получается совсем другое выражение.

□

6 Лекция 6. Умножение в когомологиях.

Умножение Колмогорова-Александера $a\in C^p(X), b\in C^q(X), \sigma\colon \Delta^{p+q}=[v_0,\dots,v_{p+q}]\to X$.

$(a\cup b)(\sigma)=a(\sigma\mid_{[v_0,\dots,v_p]})b(\sigma\mid_{[v_p,\dots,v_{p+q}]})$

$d(a\cup b)=(da)\cup b+(-1)^p a\cup(db)$.

$\cup\colon H^p(X)\otimes H^q(X)\to H^{p+q}(X)$.

Теорема 6.1. $H^*(X,R)=\oplus_{p\geqslant 0}H^p(X,R)$ *– ассоциативное градуированно коммутативное кольцо (алгебра над R) с единицей.*

Всё понятно с ассоциативностью. Трудность заключается в градуированной коммутативности. На уровне коцепей её нет.

$\omega\colon \Delta^n\to\Delta^n$ – обращение порядка вершин.

$\sigma\colon [v_0,\dots,v_n]\to X$, $\overline{\sigma}=\sigma\circ\omega$, $\overline{\sigma}(v_i)=\sigma(v_{n-i})$.

$\rho\colon C_n(X)\to C_n(X)$, $\sigma\to\varepsilon_n\overline{\sigma}$, $\varepsilon_n=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}=sgn\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & n\\ n & n-1 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

$\rho^*(a)\cup\rho^*(b)=(-1)^{pq}\rho^*(b\cup a)$

$\rho\partial=\partial\rho$

$P\colon C_n(X)\to C_{n+1}(X)$ призменный оператор.

$$P(\sigma)=\sum_i(-1)^i\varepsilon_{n-i}(\sigma\pi)\mid_{[v_0,\dots,w_{n-i},\dots,w_i]}.$$

Тогда $\partial P+P\partial=\rho-id$.

Следовательно, $[\rho^*(a)]=[a]$, $[\rho^*(b)]=b$, и $[a]\cup[b]=(-1)^{pq}[b]\cup[a]$.

Утверждение 6.1. $f\colon X\to Y$ *– непрерывное отображение. Тогда* $f^*\colon H^*(Y,R)\to H^*(X,R)$ *– гомоморфизм колец, то есть* $f^*(a\cup b)=f^*(a)\cup f^*(b)$.

Относительные когомологии:

$$\cup\colon H^p(X)\otimes H^q(X,A)\to H^{p+q}(X,A)$$
$$\cup\colon H^p(X,A)\otimes H^q(X,A)\to H^{p+q}(X,A)$$
$$\cup\colon H^p(X,A)\otimes H^q(X,B)\to H^{p+q}(X,A\cup B)$$

Третье – если (X, A) и (X, B) – клеточные пары, или A, B – открыты в X.

$C^p(X, A) \times C^q(X, B) \to C^{p+q}(X, A + B)$. Справа – коцепи, которые отображаются в ноль на цепях из A и B.

Отображение $C^{p+q}(X, A \cup B) \to C^{p+q}(X, A + B)$ индуцируют изоморфизм $H^{p+q}(X, A \cup B) \to H^{p+q}_{A+B}(X, A + B)$.

6.1 $\times$-произведение

$$\times \colon H^p(X; R) \otimes H^q(Y; R) \to H^{p+q}(X \times Y; R)$$
$$\times \colon H^p(X, A) \otimes H^q(Y, B) \to H^{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$$
$$\alpha \times \beta = p_X^*(\alpha) \cup p_Y^*(\beta), \text{ где } p_X \colon X \times Y \to X, p_Y \colon X \times Y \to Y \text{ – проекции.}$$

6.2 Клеточное умножение

X, Y – клеточные пространства. $X \times Y$ – клеточное пространство с клетками $e^m_\alpha \times e^n_\beta$, где $e^m_\alpha \subset X$, $e^n_\beta \subset Y$ – клетки.

Если хотя бы одно из них конечно, то на произведении CW-топология совпадает с топологией произведения. Вообще говоря, нет.

$$\times \colon C_m(X) \times C_n(Y) \to C_{n+m}(X \times Y), (e^m_\alpha \times e^n_\beta) \to e^m_\alpha \times e^n_\beta.$$

Замечание 6.1. Можно определить то же самое для сингулярных цепей

$$\times \colon C_p(X) \times C_q(Y) \to C_{p+q}(X \times Y)$$

за счёт триангуляции произведения $\sigma \times \tau$.

Лемма 6.1. $\partial(e^m_\alpha \times e^n_\beta) = (\partial e^m_\alpha) \times e^n_\beta + (-1)^m e^m_\alpha \times (\partial e^n_\beta)$

Для коцепей:

$$\times \colon C^p(X) \times C^q(Y) \to C^{p+q}(X \times Y), c_1 \times c_2(e^m_\alpha \times e^n_\beta) = c_1(e^m_\alpha) \cdot c_2(e^n_\beta)$$

Замечание 6.2. Иногда определяют $d \colon C_p(X) \to C_{p+1}(X)$ по формуле $\langle dc, e^n \rangle = (-1)^p \langle c, \partial e^n \rangle$, $c \in C^p(X)$. Тогда также определяют $\langle c_1 \times c_2, e^m_\alpha \times e^n_\beta \rangle = (-1)^{qm} c_1(e^m_\alpha) \cdot c_2(e^n_\beta)$ и выполнено равенство $d(c_1 \times c_2) = (dc_1) \times c_2 + (-1)^p c_1 \times (dc_2)$.

Определим

$$\cup \colon H^p(X) \times H^q(X) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q}(X)$$

где $\Delta \colon X \to X \times X$ – диагональное отображение. На уровне коцепей зависит от клеточной аппроксимации диагонали. Для гомологий уже не зависит. Доказывается путём связи с сингулярными гомологиями.

Не существует выбора естественной (т.е. функториальной) клеточной аппроксимации $\widetilde{\Delta}\colon X \to X \times X$, такой что диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] \arrow[d, "f"] & X \times X \arrow[d, "f\times f"] \\ X \arrow[r, "\widetilde{\Delta}"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Теорема 6.2 (без доказательства). *Произведение, определённое на клеточных когомологиях, совпадает с произведением, определённым через сингулярные когомологии.*

Теорема 6.3 (Формула Кюннета, без доказательства). *Пусть X, Y – клеточные пространства, R – область главных идеалов (например, $\mathbb{Z}$ или поле). Тогда*

$$0 \to \oplus_i H_i(X) \otimes H_{n-i}(Y) \to H_n(X \times Y) \to \oplus_i Tor(H_i(X), H_{n-i-1}(Y)) \to 0$$

Если $H_i(Y, R)$ – свободный R-модуль для всех i (например, если R – поле). Тогда

$$\oplus_i H_i(X, R) \otimes H_{n-i}(Y, R) \simeq H_n(X \times Y, R)$$

и

$$\oplus_i H^i(X, R) \otimes H^{n-i}(Y, R) \simeq H^n(X \times Y, R)$$

Задача 4. *$H^*(T^n) = \Lambda[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ – внешняя алгебра, где $\alpha \in H^1(S^1)$ – образующая и $\alpha_i = p_i^*(\alpha)$, $p_i\colon T^n \to S^1$.*

Задача 5. *$H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u]/(u^{n+1})$, $H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[u]$, $\deg u = 1$.*

Задача 6. *$H^*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v]/(v^{n+1})$, $H^*(\mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v]$, $\deg v = 2$.*

Задача 7. *$H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[v]/(2v)$, $\deg v = 2$.*

7 Лекция 7. Комбинаторная двойственность Пуанкаре

8 Лекция 8. Двойственность Пуанкаре

Определение 8.1. Топологическое n-мерное многообразие M – хаусдорфово (иногда паракомпактное или локально компактное) топологическое пространство со счётной базой, такое что $\forall x \in M \exists U\colon U \simeq \mathbb{R}^n$ (n-фиксированное, называется размерностью)

9 Лекция 9. Алгебро-топологический подход к двойстенности Пуанкаре

M – топологическое многообразие размерности n. Тогда $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$ для всех $x \in M$. Выбор образующей μ_x – локальная ориентация.

x и y близки, если они лежат в одной карте. Тогда существует открытый шар B, содержащий обе эти точки. Ориентации согласованы, если они переходят друг в друга при изоморфизмах $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M, M \setminus B) \simeq H_n(M, M \setminus \{y\})$. Многообразие M ориентируемо, если существует согласованный выбор ориентации во всех точках. Если многообразие ориентируемо и связно, то выборов ровно два. Иначе, не более чем $2^{\#\text{связных компонент}}$.

Ориентация M: выбор $x \to \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$.

Ориентирующее накрытие $\widetilde{M} \to M$, $\widetilde{M} = \{(x, \mu_x)\}$.

Упражнение 11. *Доказать, что то двулистное накрытие. В частности, ввести топологию.*

База топологии

$$U(\mu_B) = \{(x, \mu_x) \colon x \in B, \mu_x \text{ получается ограничением из } \mu_B \in H_n(M, M \setminus B)\}.$$

Накрытие тривиально тогда и только тогда, когда многообразие ориентируемо.

Следствие 9.1.
1. *Односвязное многообразие ориентируемо.*
2. *Если в $\pi_1(M)$ нет нетривиальных подгрупп индекса 2, то многообразие ориентируемо.*

Теорема 9.1. *Пусть M – замкнутое (компактное, без края). Тогда*

1. $H_n(M, \mathbb{Z}_2) \simeq H_n(M, M \setminus \{x\}, \mathbb{Z}_2)$ *для всех* $x \in M$*;*
2. *Если M ориентируемо, то $H_n(M, \mathbb{Z}) \simeq H_n(M, M \setminus \{x\}, \mathbb{Z})$ для всех $x \in M$;*
3. $H_i(M, \mathbb{Z}) = 0$ *при* $i > n$.

Лемма 9.1. *Если $A \subset M$ – компактное подмножество, R – коммутативная группа, то*

1. *элемент $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; R)$ равен нулю $\Leftrightarrow$ его образ в $H_n(M, M \setminus x; R)$ равен нулю для всех $x \in A$;*
2. *Для любого согласованного выбора α_x, $x \in A$,$\exists! \alpha \in H_n(M, M \setminus A, R)$, $\alpha \to \alpha_x$;*
3. $H_i(M, M \setminus A, R) = 0$ *при* $i > n$.

Из леммы следует теорема. Соображения: точная последовательность Майера-Вьеториса. Затем понадобятся когомологии с компактным носителем.

1) Предположим, что верно для A, B, и $A \cap B$. Докажем для $A \cup B$.

Рассмотрим точную последовательность Майера-Вьеториса для пары $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$:

$$0 = H_{n+1}(X, X \setminus (A \cap B)) \longrightarrow H_{n+1}(X, X \setminus (A \cup B)) \xrightarrow{\varphi} H_n(X, X \setminus A) \oplus H_n(X, X \setminus B) \xrightarrow{\psi} H_n(X, X$$

Дальше доказываются все три пункта.

2) Затем всё сводится к компактному подмножеству одной из карт (их можно выбрать конечное число из компактности). $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$. Тогда $A = A_1 \cup \dots \cup A_k$, где $A_i = A \cap V_i$, $M = V_1 \cup \dots \cup V_k = U_1 \cup \dots U_k$ и $V_i \cup U_i$, V_i замкнуты и U_i открыто.

$A \subset U \subset \mathbb{R}^n$. $H_i(M, M \setminus A) = H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$ через вырезание.

3) $A = L$ – конечный симплициальный комплекс. Всё сводится к одному симплексу и непосредственно доказывается.

4) Умеем для конечных симплициальных комплексов. Хотим для любого компакта A.

Рассмотрим представляющий цикл для $\alpha \in H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$, $\alpha = [a]$, a-цикл. $\partial a \subset C \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, C – компакт. $d(A,) = \delta > 0$ расстояние.

Существует симплициальный комплекс K, такой что $A \subset K$, $K \cap C = \varnothing$.

Берём сначала симплекс, содержащий A. После многих барицентрических подразделений диаметр станет меньше, чем половина d, симплексы не будут пересекать C.

$H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) \to H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A)$, $\alpha_K \to \alpha$. Из (3) слева ноль, поэтому справа тоже ноль при $i > n$.

Пусть $i = n$. Ограничение $\alpha \to \alpha_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$ для всех $x \in A$. Тогда $\alpha_x = 0$ для любого $x \in K$, так как есть изоморфизм $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \Delta^n) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus x)$, поскольку есть гомотопическая эквивалентность. Тогда $\alpha_K = 0$ и $\alpha = 0$.

Это даёт утверждение 1) и единственность в утверждении 2). Осталось доказать существование.

Пусть A содержится в большом симплексе. На нём уже есть согласованная ориентация. Продолжим согласованные ориентации до согласованных ориентаций $\alpha_{\Delta^n} \in H_n(X, X \setminus \Delta^n)$. Дальше $H_n(X, X \setminus \Delta^n) \to H_n(X, X \setminus A)$ даёт искомый элемент $\alpha_{\Delta^n} \to \alpha_A$.

Определение 9.1. Будем считать многообразие связным. Если M ориентированно над R, то согласно лемме существует единственный элемент $H_n(M, R) \ni [M] \to \alpha_x \in H_n(M, M \setminus x, R) = R$. Он называется фундаметальным классом *ориентированного* многообразия M. Если R не упоминается, то считается над $\mathbb{Z}$.

Дальше понадобится понятие степени отображения многообразий. $f \colon M \to N$ замкнутые связные ориентированные. Тогда $\deg f = d$, если $f_*[M] = d[N]$.

Утверждение 9.1. *Для любого связного замкнутого n-мерного ориентированного многообразия M существует отображение в сферу S^n степени* 1.

$U \subset M$ – карта. $U \simeq \mathbb{R}^n$. $M \to M/(M \setminus U) \simeq S^n$.
$H_n(M) \to H_n(M, M \setminus U)(= H_n(S_n)) \to H_n(M, M \setminus x)$ для всех $x \in U$. Тогда $[M] \to [S^n]$.

9.1 $\cap$-произведение

$H^k(X,R) \to Hom(H_k(X,R),R) \to 0$ сюрьективное отображение. Не всегда изоморфизм. Ядро – некоторый $Ext(H_{k+1}(X),R)$.

Определим

$$\cap\colon C_k(X,R) \times C^l(X,R) \to C_{k-l}(X,R), k \geqslant l : \sigma \cap \varphi = \varphi([v_0,\ldots,v_l])\sigma \mid_{[v_l,\ldots,v_k]}$$

Лемма 9.2. $\partial(\sigma \cap \varphi) = (-1)^l((\partial\sigma) \cap \varphi - \sigma \cap d\varphi)$.

Упражнение 12. *Доказать лемму.*

Тогда получаем $\cap\colon H_k(X,R) \times H^l(X,R) \to H_{k-l}(X,R)$. Также есть относительные версии

$$\begin{aligned} H_k(X,A) \times H^l(X) &\to H_{k-l}(X,A) \\ H_k(X,A) \times H^l(X,A) &\to H_{k-l}(X,A) \\ H_k(X,A \cup B) \times H^l(X,A) &\to H_{k-l}(X,B) \end{aligned}$$

Сравнить с $\cup\colon H^k(X,A) \times H^l(X,B) \to H^{k+l}(X,A \cup B)$.

Лемма 9.3 (Функториальность)**.**

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 = H_n(X^{n-1}) \arrow[dr] & & H_n(X^{n+1}) = H_n(X) \arrow[ur] & & \\
 & H_n(X^n) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) \arrow[ur] & \\
 & & H_{n-1}(X^{n-2}) = 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$$f_*(\alpha) \cap \varphi = f_*(\varphi \ldots)$$

.

Теорема 9.2. *Пусть M – замкнутое, R-ориентированное. Тогда $D\colon H^k(M,R) \to H_{n-k}(M,R)$, $D\varphi = [M] \cap \varphi$, является изоморфизмом для любого k.*

Понадобится двойственность Пуанкаре для незамкнутых многообразий, чтобы свести всё к одной карте. Для этого когомологии с компактным носителем.

10 Лекция 10. Доказательство основной теоремы

10.1 Когомологии с компактными носителями, прямые пределы групп

10.2 Лемма о последовательности Майера-Вьеториса

10.3 Доказательство теоремы

Теорема 10.1. *Пусть M – R-ориентированное многообразие*

11 Лекция 11. Продолжение

11.1 Повторение схемы доказательства

11.2 Связь двойственности Пуанкаре с $\cup$-произведением

Упражнение 13. $\alpha \cap (\varphi \cup \psi) = (\alpha \cap \varphi) \cap \psi$. *В частности, если $k = l + m$, то $\psi(\alpha \cap \varphi) = (\varphi \cup \psi)(\alpha)$.*

Можно обозначить по-другому $\langle \psi, \alpha \cap \varphi \rangle = \langle \varphi \cup \psi, \alpha \rangle$ (*).

Рассмотрим $H^k(M,R) \times H^{n-k}(M,R) \to R$, $(\varphi, \psi) \to (\varphi \cup \psi, [M])$. M – замкнутое (компактное, без края).

Определение 11.1. A, B – R – модули. Билинейное спаривание $A \times B \to R$ невырожденно, если $A \to Hom(B,R)$ и $B \to Hom(A,R)$ – изоморфизмы.

Утверждение 11.1. *$\cup$-спаривание невырожденно, если R – поле или $R = \mathbb{Z}$ и рассматривается фактор по кручению:*

$$H^k(M)/Tors \times H^{n-k}(M)/Tors \to \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Рассмотрим (к-ты в R) $H^{n-k}(M) \to^h Hom_R(H_{n-k}(M), R) \to^{D^*} Hom_R(H^k(M), R)$, определяемое как

$$\psi \to (\alpha \to \langle \psi, \alpha \rangle) \to (\varphi \to \langle \psi, D\varphi \rangle = \langle \psi, [M] \cap \varphi \rangle = \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle)$$

Тогда $\psi \to (\varphi \to \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle)$ – изоморфизм. Кроме того, $\varphi \to (\psi \to \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle)$ – тоже изоморфизим в силу кососкоммутативности. □

Следствие 11.1. *Если R – поле, $H^*(M,R)$ – алгебра Пуанкаре. Если $R = \mathbb{Z}$, то для $H^*(M,\mathbb{Z})/Tors$.*

11.3 Двойственность Пуанкаре-Лефшеца.

Если M – компактное ориентируемое (то есть $M \setminus \partial M$ ориентируемо) n-мерное многообразие с краем ∂M. Тогда $\exists[M] \in H_n(M, \partial M)$ – фундаментальный класс:

$$D_M = [M] : H^k(M, \partial M) \to H_{n-k}(M), H^k(M) \to H_{n-k}(M, \partial M) \text{– изоморфизмы}$$

Доказательство. Существует воротниковая окрестность – $U(\partial M) \simeq \partial M \times [0, 1)$. Тогда $H_i(M, \partial M) \simeq H_i(M \setminus \partial M, \partial M \times (0, \varepsilon) = (M \setminus \partial M) \setminus K)$, где K компактное.

$\exists[M] \in H_n(M, \partial M)$ ограничение даёт ориентацию во всех точках $M \setminus \partial M$.

$H^k(M, \partial M) \simeq H^k(M \setminus \partial M, (M \setminus \partial M) \setminus K) \simeq H^k_c(M \setminus \partial M)$.

$H_{n-k}(M) \simeq H_k(M \setminus \partial M)$. □

12 Лекция 12. Двойственность Александера с алгебро-топологической точки зрения.

Часть II

Весенний семестр. Двойственность в гомотопической и эквивариантной топологии.

13 Лекция 1. Расслоения и корасслоения

14 Лекция 2. Двойственность Экмана-Хилтона

Декартов и кодекартов квадрат.

Теоремы факторизации. Коцилиндр и цилиндр отображения. Примеры: отображение точки в Y и отображение X в точку.

Задача 8. *Разложения являются функториальными.*

Гомотопический слой $\mathrm{hofibre} f$ отображения $f\colon X \to Y$ (коконус отображения).

Задача 9. *Для любого разложения f в композицию гомотопический слой гомотопически эквивалентен одному и тому же пространству.*

Гомотопический кослой $\mathrm{hocofibre} f$ отображения $f\colon X \to Y$ (конус отображения).

Задача 10. *Найти гомотопический слой для отображений:*

1. $S^1 \vee S^1 \to S^1 \times S^1$. *(отвечает коммутанту свободной группы с двумя образующими).*

2. $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.

3. $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ *$(x \to x,\ y \to y)$.*

Мысли в слух: найти кослой для $S^2 \vee S^2 \to S^2 \times S^2$. Ответ: S^4.
Гомотопическая последовательность расслоения (последовательность Баратта). Последние три члена – расслоение:

$$\cdots \to \Omega^2 B \to \Omega F \to \Omega E \to \Omega B \to F \to E \to B$$

Задача 11. *Если $E \to B$ – расслоение со слоем F, то* $\mathrm{hofibre}(F \to E) \simeq \Omega B$.

Гомотопическая последовательность корасслоения (последовательность Пуппе).

$A \to X \to X/A \to$ (отображение с точностью до гомотопии)$\Sigma A \to \Sigma X \to \Sigma(X/A) \to \dots$

Упражнение 14. *Если $A \to X$ – корасслоение, то* $\mathrm{hocofibre}(X \to X/A) \simeq \Sigma A$.

Анонс: для гомотопической последовательности расслоения отображения из ΣY будут образовывать точную последовательность групп, а для гомотопической последовательности корасслоения отображения а ΩY будут образовывать точную последовательность групп.

15 Лекция 3. Гомотопические группы. Основные факты. Точная последовательность пары.

16 Лекция 4. Гомотопические группы. Продолжение.

Окончание доказательства точность гопотопической последовательности пары.
Точная гомотопическая последовательность расслоения. Изоморфизм $\pi_n(E, F, e_0) \simeq \pi_n(B)$

Теорема 16.1. *Пусть $p\colon E \to B$ – расслоение Серра, B линейно связно, F – слой. Тогда есть точная последовательность:*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} \dots \xrightarrow{\partial} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \longrightarrow 0$$

17 Лекция 5. Теорема Уайтхеда.

18 Лекция 6. Формулировки теоремы Гуревича и гомологической теоремы Уайтхеда, слабая гомотопическая эквивалентность.

Цель: $H^n(X, G) = [X, K(G, n)]$ (двойственность Экмана-Хилтона: $\pi_n(X) = [S^n, X]$).

Теорема Уайтхеда в гомологиях (пока формулировка):

Теорема 18.1. *Если X и Y односвязны и $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ – изоморфизм, то f – гомотопическая эквивалентность.*

Мы выведем её из теоремы Теоремы Гуревича (пока формулировка).

Теорема 18.2. *Определим $h\colon \pi_n(X) \to H_n(X)$, $[f\colon S^n \to X] \to f_*[S^n] \in H_n(X)$.*

1. *Если X линейно связно, то $\pi_1(X) \to H_1(X)$ – эпиморфизм с ядром $[\pi_1, \pi_1]$ (теорема Пуанкаре).*

2. *Если $\pi_i(X) = 0$ при $i < n$ и $n > 1$, то $h\colon \pi_n(X) \to H_n(X)$ – изоморфизм.*

Неверно, что если f индуцирует тривиальное отображение в π_* и H_*, то f гомотопно отображению в точку.

Пример: $S^1 \times S^1 \times S^1 \to S^3 = S^1 \times S^1 \times S^1/2$-мерный остов $\to$ отображение Хопфа S^2. Обосновывается на основе точной последовательности пространств для расслоения Хопфа.

Доказательство теоремы Пуанкаре. Пример: сфера с g ручками.

Слабая гомотопическая эквивалентность и клеточная аппроксимация пространств.

Определение 18.1. $f\colon X \to Y$ называется слабой гомотопической эквивалентностью, если $f_*\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ – изоморфизм для всех $n \geqslant 0$ и всех $x_0 \in X$.

Теорема Уайтхеда переформулируется как: слабая гомотопическая эквивалентность клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью.

Определение 18.2. Два пространства X и Y слабо гомотопически эквивалентны, если существует зигзаг:

$$X \longleftarrow Z_1 \longrightarrow Z_2 \longleftarrow Z_3 \longrightarrow \ldots \longleftarrow Z_k \longrightarrow Y,$$

где все стрелки – слабые гомотопические эквивалентности.

Определение 18.3. Клеточная аппроксимация пространства X – это слабая гомотопическая эквивалентность $f\colon Z \to X$, где Z – клеточное пространство.

Теорема 18.3. *Для любого пространства X существует клеточное пространство Z и слабая гомотопическая эквивалентность $Z \to X$, причем если X и Y слабо гомотопически эквивалентны, то для них можно выбрать одно и то же пространство.*

19 Лекция 7. Теорема о клеточной аппроксимации пространств

20 Лекция 8. Теорема Гуревича

Теорема 20.1. *Пусть $X = A \cup B$, $C = A \cap B$ связно и непусто, A и B – клеточные подкомплексы. Пусть также $\pi_i(A, C) = 0$ при $i \leqslant m$, $\pi_i(B, C) = 0$ при $i \leqslant n$. Тогда $\pi_i(A, C) \to \pi_i(X, B)$ – изоморфизм при $i < m + n$ и эпиморфизм при $i = m + n$.*

Пример 20.1. (Z, A) – клеточная пара, $Z = A \cup_\alpha e_\alpha^{>n}$. Тогда $\pi_i(Z, A) = 0$ при $i \leqslant n$.

$$\pi_{n+1}(Z, A) \longrightarrow \pi_n(A) \longrightarrow \pi_n(Z) \longrightarrow \pi_n(Z, A) = 0 \longrightarrow \pi_{n-1}(A) \longrightarrow \pi_{n-1}(Z),$$

Доказательство. Случай 1: $A = C \bigcup \cup_\alpha e_\alpha^{m+1}$, $B = C \cup e^{n+1}$.

$F\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$, $[f] \in \pi_i(X, B)$. $f(D^i)$ пересекает конечное число клеток e_α^{m+1}, e^{n+1}. Выберем точки $p_\alpha \in e_\alpha^{m+1}$, $q \in e^{n+1}$.

Лемма 20.1. *Существует $g\colon (D^i, S^{-1}) \to (X, B)$, гомотопное f, такое что $g^{-1}(p_\alpha)$ – полиэдр (геометрический симплициальный комплекс) размерности $\leqslant i-m-1$ и $g^{-1}(q)$ – полиэдр размерности $\leqslant i - n - 1$.*

Лемма 20.2. *Пусть $K, L \subset \mathbb{R}^p$ – полиэдры, причём $\dim(K) \leqslant k$, $\dim(L) \leqslant l$. Если $k+l+1 < p$, то K и L не зацеплены (то есть с точностью до изотопии разделяются плоскостью).*

$(i - m - 1) + (i - n - 1) + 1 = 2i - (m + n) - 1 \leqslant i - 1 < i$. $\Rightarrow$ с точностью до изотопии $g^{-1}(\cup_\alpha p_\alpha)$ и $g^{-1}(q)$ разделены в D^i гиперплоскостью. Строим гомотопию $g_t\colon (D^i, S^{i-1}) \to (X, B)$, такую что $g_t(S^{i-1}) \cap (\cup_\alpha p_\alpha) = \varnothing$ для всех t и $g_1(D^i) \cap \{q\} = \varnothing$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(A, C) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \pi_i(X, B) \arrow[d, "\simeq"] \\
\pi_i(X \setminus \{q\}, X \setminus (\{q\} \cup \cup_\alpha \{p_\alpha\})) \arrow[r] & \pi_i(X, X \setminus \cup_\alpha \{p_\alpha\})
\end{tikzcd}$$

$[f] = [g_1] \in \pi_i(A, C)$.

Доказательство инъективности проводится аналонично используя аппоксимацию гомотопии.

Случай 2. $A = C \bigcup \cup_\alpha e_\alpha^{m+1}$, $B = C \cup \cup_\beta e_\beta^{\geqslant n+1}$. $f(D^i)$ пересекает конечное число e_β^{n+1}. Сдвигаем f по очереди с клеток в $B \setminus C$. Для мономорфности нужно использовать гомотопию $F\colon (D^i, S^{i-1}) \times I \to (X, B)$.

Случай 3. $A = C \bigcup \cup_\alpha e_\alpha^{\geqslant m+1}$, $B = C \cup \cup_\beta e_\beta^{\geqslant n+1}$. Алгебраическое рассуждение с точной последовательностью пар. Клетки в A размерности больше $m + n + 1$ не влияют на гомотопические группы размерности $(m + n)$. $A_k = C \cup \cup_\alpha e_\alpha^{\leqslant k}$, $X_k = A_k \cup B$. $e_k\colon \pi_i(A_k, C) \to \pi_i(X_k, B)$ индукция по k.

$$\begin{tikzcd}
\pi_{i+1}(A_k, A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq\text{сл1}"] & \pi_i(A_{k-1}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq\text{инд } e_{k-1}"] & \pi_i(A_k, C) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq e_k"] & \pi_i(A_k, A_{k-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq\text{сл1}"] & \pi_{i-1}(A_{k-1}, C) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq\text{инд } e_{k-1}"] & \dots \\
\pi_{i+1}(X_k, X_{k-1}) \arrow[r] & \pi_i(X_{k-1}, B) \arrow[r] & \pi_i(X_k, B) \arrow[r] & \pi_i(X_k, X_{k-1}) \arrow[r] & \pi_{i-1}(X_{k-1}, B) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

при $i < m+n$ все изоморфизмы $\Rightarrow e_k$ – изоморфизм. При $i = m+n$ e_k – эпиморфизм.

Случай 4. Общий. $\square$

Утверждение 20.1. *Пусть $\pi_i(X, A) = 0$ при $i \leqslant k$, $\pi_j(A) = 0$ при $j \leqslant l$. Тогда $\pi_i(X, A) \to \pi_i(X/A)$ – изоморфизм при $i \leqslant k + l$ и эпиморфизм при $i = k + l + 1$.*

Доказательство. Теорема вырезания для (X, A) (k-связно) и (CA, A) ($(l+1)$-связно). $\pi_i(X, A) \to \pi_i(X \cup CA \simeq X/A, CA)$. $\square$

Стабильные гомотопические группы. $\pi_i(Y) \to \pi_{i+1}(\Sigma Y)$ – изоморфизм при $i < 2n+1$, если Y n-связно.

Следствие 20.1. *Пусть X – клеточное, $\Sigma^k X$ $(k-1)$-связно. Рассмотрим*

$$\pi_i(X) \longrightarrow \pi_{i+1}(\Sigma X) \longrightarrow \pi_{i+2}(\Sigma^2 X) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_{i+k}(\Sigma^k X) \longrightarrow \pi_{i+k+1}(\Sigma^{k+1} X)$$

изоморфизмы при $i + k < 2(k-1) + 1$.

Определение 20.1. $\pi_{i+k}(\Sigma^k X)$ при $k > i+1$ называется *стабильной гомотопической группой* пространства X.

Пример 20.2. $X = S^0$, $\pi_{i+k}(S^k)$, $k > i+1$, называется i-ой стабильной гомотопической группой сфер. Обозначается π_i^s.

$\pi_0^s = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$
$\pi_1^s = \pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ 1936 Понтрягин, Фрейденталь
$\pi_2^s = \pi_6(S^4) = \mathbb{Z}_2$ 1952 Понтрягин, Уайтхед
$\pi_3^s = \pi_8(S^5) = \mathbb{Z}_{24}$ 1953 Понтрягин, Рохлин.
Дальше были алгебраические методы Серра (в том числе спектральная последовательность)

Анонс: теорема Гуревича:

Теорема 20.2. *Пусть X (n-1)-связно, $n \geqslant 2$, то есть $\pi_0(X) = \cdots = \pi_{n-1}(X) = 0$. Тогда $H_1(X) = \cdots = H_{n-1}(X) = 0$ и $h\colon \pi_n(X, x_0) \to H_n(X)$ – изоморфизм.*

Есть относительная версия. С помощью неё доказывается теорема Уайтхеда.

Теорема 20.3. *Отображение $f\colon X \to Y$ односвязных клеточных пространств является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда $f_*\colon H_*(X) \to H_*(Y)$ – изоморфизм.*

21 Лекция 9. Примеры к теореме Гуревича

22 Лекция 10. Доказательство теоремы Гуревича и гомологической теоремы Уайтхеда

Список литературы

[1] В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004.

[2] Victor Buchstaber and Taras Panov. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, http://www.math.cornell.edu/?hatcher.

[4] Anders Björner, Martin Tancer, *Note: Combinatorial Alexander duality – a short and elementary proof*, Discrete & Computational Geometry volume 42, Article number: 586 (2009), arXiv:0710.1172v3.

[5] Т.Е. Панов. *Топология 2*. Лекции в НМУ.