Записки лекций по симплектической геометрии и топологии

М.В. Прасолов, В.А. Шастин

30 марта 2019

Содержание

1 Немного истории

На примере трёх сюжетов мы познакомимся с предысторией основных понятий симплектической геометрии – симплектической матрицы, гамильтониана и симплектической формы.

1.1 Линейная оптика и симплектические матрицы

Пусть z, q – координаты на плоскости. Мы собираемся описать преломление лучей света в среде с переменной скоростью света. Мы будем считать, что лучи испускаются из точки (z_0, q_0) при малом q_0 под (ориентированным) углом θ_0 к оси Oz, близким к нулю. Также мы будем считать, что есть конечное число областей с постоянной скоростью света, а границы между областями – это регулярные дважды дифференцируемые кривые, ортогональные оси Oz.

Случай постоянной скорости света. В этом случае луч света движется по прямой. Если в точке (z_0, q_0) он летел под углом θ_0, то в момент, когда его $z-$координата станет равной z_1, его q-координата будет $q_1 = q_0 + (z_1 - z_0)\operatorname{tg}\theta_0$, а угол $\theta_1 = \theta_0$ сохранится. Перепишем это равенство в матричном виде, переходя к координатам $(n\theta, q)$ (здесь $1/n$ – скорость света, смысл замены будет ясен из дальнейшего) и заменяя $\operatorname{tg}\theta_0$ на θ_0, то есть заменяя функцию на её первое приближение:

$$\begin{pmatrix} n\theta_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\theta_0 & q_0 \end{pmatrix} A_{z_0 \to z_1}, \qquad A_{z_0 \to z_1} = \begin{pmatrix} 1 & n(z_1 - z_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай одной границы. Пусть луч света вылетел из точки (z_0, q_0) области со скоростью $1/n_0$ под углом θ_0 и пересёк границу в точке (z, q). Если идти по границе сред от оси Oz до точки (z, q), то нормаль к кривой повернётся на (ориентированный) угол qk, где k – это кривизна кривой (в точке пересечения с осью), выбранная с правильным знаком. Выражение qk получается из того факта, что в натуральной параметризации скорость вращения вектора скорости кривой есть кривизна кривой, что координата q задаёт натуральную параметризацию на кривой с точностью до квадратичной по q погрешности и что линейная часть выражения qk не зависит от поведения функции k в окрестности. Следовательно луч пересечёт границу под углом $\theta_0 - qk$ к её нормали.

Применим закон преломления: отношение скорости света к синусу угла между лучом и нормалью к границе сред одинаковое до пересечения границы и после.

Упражнение. Пусть A_1 и A_2 – точки, находящиеся по разные стороны от прямой ℓ, n_1 и n_2 – положительные константы. Найдите на прямой ℓ такую точку X, что величина $n_1 \cdot A_1X + n_2 \cdot A_2X$ минимальна.

Пользуясь принципом Ферма, то есть что луч света летит по траектории, на движение по которой потратит меньше времени, докажите закон преломления.

Тогда после преломления луча угол к нормали границы станет равным $(\theta_0 - qk) \cdot \cdot n_0/n_1$ (после отбрасывания квадратичных по q_0 и θ_0 членов). А угол к оси Oz будет $(\theta_0 - qk) \cdot n_0/n_1 + qk$. Условно обозначая точку пересечения лучом границы за (z_-, q_-) до пересечения и за (z_+, q_+) – после пересечения, запишем равенство в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} n_1\theta_1 & q_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0\theta_0 & q_- \end{pmatrix} A_{z_- \to z_+}, \qquad A_{z_- \to z_+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k(n_1 - n_0) & 1 \end{pmatrix}.$$

Если луч света не пересекал больше границ сред, то конечные параметры луча выражаются через начальные с помощью произведения трёх матриц:

$$\begin{pmatrix} n_1\theta_1 & q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_0\theta_0 & q_0 \end{pmatrix} A_{z_0 \to z_1}, \qquad A_{z_0 \to z_1} = A_{z_0 \to z_-} A_{z_- \to z_+} A_{z_+ \to z_1},$$

где первая и третья матрицы в правом выражении строятся аналогично случаю постоянной скорости света. Обратите внимание, что замена координаты $\theta \to n\theta$ обеспечила нам равенство определителя любой матрицы единице, то есть определитель матрицы $A_{z_0 \to z_1}$ тоже равен 1. Больше ограничений нет: любую матрицу с определителем 1 можно представить в виде произведения матриц с единицами на диагонали и одним нулём. Матрицы с определителем 1 называются специальными, а в случае 2×2 ещё они называются симплектическими матрицами.

Упражнение. Докажите, что любая матрица 2×2 с определителем 1 раскладывается в произведение матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{или} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай линзы. Пусть теперь луч света проходит через тонкую область, где скорость света равна $1/n_1$, причём эта область ограничена двумя дугами окружности – у окружности, которую луч пересекает первой, кривизна равна $-1/R_1$, а у второй – $1/R_2$. (Это соответствует тому, что линза выпуклая в обе стороны.)

Пусть z_0 и z_1 – это такие точки оси Oz, что лучи, вышедшие из них и прошедшие линзу, становятся параллельными оси Oz. Пусть линза находится на оси q. Тогда $|z_0|$ и $|z_1|$ называются фокусными расстояниями линзы. Вычислим преобразование параметров лучей:

$$
\begin{aligned}
A_{z_0\to z_1} &= A_{z_0\to 0_-}A_{0_-\to 0}A_{0\to 0_+}A_{0_+\to z_1} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -n_0 z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(n_1-n_0)/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_0-n_1)/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_0 z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -n_0 z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_0 z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_0 z_0 \lambda + 1 & -n_0 z_0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n_0 z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -n_0 z_0 \lambda + 1 & -n_0 z_0 + (-n_0 z_0 \lambda + 1) n_0 z_1 \\ \lambda & 1 + \lambda n_0 z_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где $\lambda = (n_0 - n_1)(1/R_1 + 1/R_2)$.

Из условия, что z_0 и z_1 – фокусы, следует, что у матрицы $A_{z_0\to z_1}$ на диагонали стоят нули, то есть

$$
\frac{1}{z_1} = -\frac{1}{z_0} = (n_1 - n_0) n_0 (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}),
$$

что при $n_0 = 1$ превращается в обычную формулу линзы.

Случай линзы в пространстве. Аналогично можно записать формулы в пространстве с координатами z, q_1, q_2, где у луча берутся (ориентированные) углы θ_1, θ_2, которые составляет его проекция соответственно на плоскости Ozq_1, Ozq_2 с осью Oz. Тогда аналогично матрицы преобразований параметров лучей получаются композицией двух видов матриц:

$$
\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ A & E_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_2 & B \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},
$$

где E_2 – единичная матрица, а A и B – любые матрицы 2×2.

Упражнение. Покажите это. *Указание.* Поворотом плоскости Oq_1q_2 сведите к случаю, когда главные кривизны граничной поверхности направлены вдоль осей Oq_1 и Oq_2. В этом случае проведите аналогичное плоскому случаю рассуждение.

Упражнение. Покажите, что если $X = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ A & E_2 \end{pmatrix}$ и $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix}$, то $X^T \Omega X = \Omega$.

Матрицы, удовлетворяющие последнему равенству из упражнения, называются симплектическими матрицами. Аналогично случаю 2×2, любая симплектическая матрица представляется в виде произведений двух видов матриц, указанных выше.

Идеи этого параграфа принадлежат Гамильтону. Продолжение смотрите в книге [GS84].

1.2 Гамильтонов формализм ньютоновской механики

Запишем уравнения Ньютона для движения частицы $x(t)$ с массой m в стационарном поле с потенциалом $u(x)$:

$$m\ddot{x} = -\nabla_x U.$$

Как известно, вдоль решений этого уравнения сумма $H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$ кинетической и потенциальной энергии сохраняется. Введём координаты $p_i = m\dot{x}^i$, $q^i = x^i$. Обратите внимание, что за добавленные координаты мы взяли не скорости $\dot{x}^i$, а импульсы p_i, которые отличаются коэффициентом m. Эта замена полностью аналогична замене из предыдущего сюжета, где координата $n\theta$ играла роль импульса, а скорость была равна θ/n (**упражнение:** проверить). Перепишем в новых координатах функцию $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ и уравнения Ньютона:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\nabla_q H, \\ \dot{q} = \nabla_p H, \end{cases}$$

что можно переписать в матричном виде через градиент H:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} = \nabla H \cdot \Omega, \ \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Итак, мы перешли от дифференциального уравнения второго порядка в координатах x на конфигурационном пространстве к дифференциальному уравнению первого порядка в координатах (p, q) на фазовом пространстве. Решения уравнений первого порядка совпадают с траекториями некоторого векторного поля. Векторное поле, заданное системой 1 называется гамильтоновым. Как заметил Пуанкаре [Poin99], поток гамильтонова векторного поля сохраняет объём, а значит, у соответствующей системы дифференциальных уравнений не может быть асимптотически устойчивого решения, ведь окрестность устойчивого решения сдавливается внутрь.

В заключение отметим, что аппарат симплектической геометрии переносится с геометрической оптики и классической механики на квантовую механику.

1.3 Линейный комплекс прямых

Этот сюжет относится к проективной геометрии. Пространство прямых в вещественном трёхмерном проективном пространстве можно снабдить проективными координатами. А именно, любой прямой ℓ, проходящей через различные точки a и b с однородными координатами $(a_0 : a_1 : a_2 : a_3)$ и $(b_0 : b_1 : b_2 : b_3)$, сопоставим точку $a \wedge b$ пятимерного проективного пространства с координатами

$$\left(\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right).$$

Легко видеть, что при домножении однородных координат точки a или b на число и при выборе другой пары различных точек на прямой ℓ, точка $a \wedge b$ не меняется.

Однородные координаты точки $a \wedge b$ называются координатами Плюккера прямой ℓ, а отображение называется отображением Плюккера. Обозначим координаты пятимерного пространства $(c_{01} : c_{02} : c_{03} : c_{12} : c_{13} : c_{23})$. Тогда образ отображения Плюккера можно задать одним уравнением: $c_{01}c_{23} - c_{02}c_{13} + c_{03}c_{12} = 0$. Тем самым пространство прямых становится гиперповерхностью 2-го порядка в проективном пространстве.

Упражнение. Постройте бескоординатный аналог отображения Плюккера: пусть ξ и η – линейные функции на $\mathbb{R}^4$. Тогда отображение $(\xi, \eta) \mapsto \xi \wedge \eta \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$, которое сопоставляет паре линейных функций кососимметричную билинейную функцию, индуцирует сопоставление каждого двумерного подпространства некоторому одномерному (а после проективизации прямым сопоставляет точки). Покажите, что образ этого отображения задаётся уравнением $\psi \wedge \psi = 0 \in \bigwedge^4(\mathbb{R}^4)^*$.

Имея такое представление пространства прямых, естественно назвать его подмножество *линейным* комплексом прямых, если оно задаётся одним линейным соотношением на координаты Плюккера.

Упражнение. Докажите, что любое линейное соотношение на плюккеровы координаты множества кососимметричных форм $\psi \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$ задаётся единственным способом в виде $\psi \wedge \omega = 0$, где $\omega \in \bigwedge^2(\mathbb{R}^4)^*$ фиксировано.

Если мы интересуемся группой преобразований фиксированного линейного комплекса прямых, сохраняющих проективную структуру, то мы получаем проективные преобразования $\mathbb{R}P^3$ с матрицей, сохраняющей форму ω из последнего упражнения. Сначала такую группу называли «комплекс-группой» или «группой линейного комплекса», но из-за путаницы с комплексными числами Герман Вейль [Weyl39] предложил название «симплектическая группа». *Симплектический* – это калька с греческого $\sigma\upsilon\mu\pi\lambda\varepsilon\varkappa\tau\iota\varkappa\acute{o}\sigma$ (сплетающий, соединяющий [Veys99]), что является переводом с латинского *complexus*. По иронии судьбы между комплексной и симплектической геометриями позже обнаружилась глубокая связь.

Список литературы

[GS84] Guillemin V., Sternberg Sh. *Symplectic techniques in physics.* Cambridge University Press, 1984.

[Poin99] Poincaré H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Tome III.* Gauthier-Villars et Fils, Paris, 1899.

[Weyl39] Вейль Г. *Классические группы. Их инварианты и представления.* Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1947.

[Veys99] Вейсман А. *Греческо-русский словарь.* Издание автора, Санкт-Петербург, 1899.

2 Геометрия векторного пространства с кососимметричной билинейной формой

Этот раздел относится к линейной алгебре. В этом разделе размерность векторных пространств мы считаем конечной.

Напомним, что действие оператора на векторном пространстве продолжается до действия на тензорной алгебре, и, в частности, оператор A переводит билинейную форму $b(\cdot, \cdot)$ в форму $(A \cdot b)(x, y) = b(Ax, Ay)$. Если $A \cdot b = b$, то мы говорим, что оператор A сохраняет форму b. Если форма b невырожденная, то есть её правое (и левое) ядро нулевое, то операторы, сохраняющие форму b, образуют группу $O(b)$ относительно композиции.

Упражнение. Проверьте, что операторы, сохраняющие невырожденную билинейную форму, обратимы.

Упражнение. Пусть характеристика поля отлична от 2. Тогда оператор, сохраняющий форму, должен сохранять её симметричную и кососимметричную части по отдельности.

Указание. Это следует из линейности действия оператора на пространстве форм и единственности разложения формы на симметричную и кососимметричную части.

Последнее упражнение говорит, что $O(b) = O(\frac{b+b^T}{2}) \cap O(\frac{b-b^T}{2})$ (множества в равенстве не обязаны образовывать группу). Случай вещественной положительно определённой симметричной формы подробно разбирается в стандартном курсе. Любые две такие формы переводятся друг в друга невырожденным оператором, а группа $O(b)$ в этом случае совпадает с группой $O(n)$ изометрий евклидова пространства E^n. В неопределённом случае мы получаем группы $O(p, q)$ изометрий псевдоевклидова пространства, где p и q – индексы инерции формы b. Естественно дальше перейти к группе операторов, сохраняющих вещественную кососимметричную форму.

2.1 Примеры симплектических форм

Пусть ω – невырожденная кососимметричная билинейная форма на векторном пространстве V. Форму ω мы будем называть симплектической, а пространство V – симплектическим.

Пример. Пусть X – векторное пространство, X^* – пространство линейных функций на X, и $V = X \oplus X^*$. Тогда форма $\omega(x \oplus \xi, y \oplus \eta) = \xi(y) - \eta(x)$ есть симплектическая форма на V.

Пример. Пусть V – эрмитово пространство, то есть комплексное векторное пространство с такой (полуторалинейной) формой h, что

$$h(x, k \cdot y) = k \cdot h(x, y) \ k \in \mathbb{C}, \quad h(x, y) = \overline{h(y, x)}, \text{ и } h(x, x) > 0 \text{ при } x > 0.$$

Разложим форму h в сумму $\left(\frac{h+\bar{h}}{2}\right)+i\left(\frac{h-\bar{h}}{2i}\right)$ вещественной и мнимой частей. Каждое слагаемое есть (вещественная) билинейная форма на вещественном пространстве $V_{\mathbb{R}}$, которое получается из пространства V, если запретить умножать его вектора на **не** вещественные числа, а все остальные операции оставить как есть. Пространство $V_{\mathbb{R}}$ называется овеществлением пространства V. Тогда форма $\omega=\frac{h-\bar{h}}{2}$ есть симплектическая форма на $V_{\mathbb{R}}$.

Упражнение. Докажите, что в обоих примерах форма невырожденна.

Указание. Постройте базис, в котором матрица формы обратима.

В обоих примерах размерность пространства была чётной. Это следствие теоремы из стандартного курса [Винберг]:

Теорема. *Для любой кососимметричной билинейной формы b найдётся базис $e_1,\dots,e_n$, $f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_l$, в котором матрица формы имеет следующий вид*

$$\begin{pmatrix} 0_{nn} & E_n & 0_{nl} \\ -E_n & 0_{nn} & 0_{nl} \\ 0_{ln} & 0_{ln} & 0_{ll} \end{pmatrix},$$

где E_n – единичная матрица $n\times n$, 0_{km} обозначает матрицу размера $k\times m$ из всех нулей, размерность ядра $\ker b$ формы обозначена за l. То есть $b(e_i,f_j)=\delta_{ij}=-b(f_j,e_i)$, а остальные значения формы b на парах векторов базиса нулевые.

Базис из теоремы называется *базисом Дарбу.* Из этой теоремы также следует, что любые две симплектические формы переводятся друг в друга обратимым оператором, который переводит базис Дарбу одной формы в базис Дарбу другой.

2.2 Геометрия подпространств симплектического пространства

Пусть W – подпространство симплектического пространства V, тогда его симплектическим дополнением называется подпространство $W^\omega=\{v\in V\mid \omega(v,w)=0\ \forall w\in W\}$, состоящее из всех векторов V, ω-ортогональных подпространству W. Из невырожденности ω следует, что

$$\dim W+\dim W^\omega=\dim V,\ \text{ и } (W^\omega)^\omega=W.$$

Подпространство W называется

- симплектическим, если $W\cap W^\omega=0$;
- изотропным, если $W\subset W^\omega$;
- коизотропным, если $W\subset W^\omega$;
- лагранжевым, если $W=W^\omega$.

Упражнение. Докажите, что одномерные подпространства изотропны и что для любого одномерного подпространства L найдётся такое одномерное подпространство N, что их сумма $L \oplus N$ есть симплектическое подпространство.

Упражнение. Докажите, что если W – симплектическое подпространство, то $W \oplus W^\omega = V$ и W^ω – симплектическое.

Эти два упражнения дают доказательство существования базиса Дарбу по индукции.

В евклидовом пространстве любые два подпространства одной размерности переводятся друг в друга изометрией всего пространства. Возникает естественный вопрос: какие подпространства *симплектического* пространства переводятся друг в друга оператором, сохраняющим симплектическую форму ω? Как показывает следующее упражнение, размерность ядра ограничения формы ω на подпространства должна совпадать:

Упражнение. Если оператор A сохраняет форму ω, то $A\cdot W^\omega = (A\cdot W)^\omega$ для любого подпространства W.

Так как такой оператор обратим, то и размерность двух таких подпространств должна совпадать. Оказывается, этих условий достаточно:

Теорема Витта. *Пусть W_1 и W_2 – два подпространства симплектического подпространства V с формой ω, $\dim W_1 = \dim W_2$ и $\dim\ker\omega\Big|_{W_1} = \dim\ker\omega\Big|_{W_2}$. Тогда существует оператор A пространства V, сохраняющий форму ω и переводящий одно подпространство в другое: $A\cdot W_1 = W_2$.*

Упражнение. Докажите теорему Витта.

Указание. Докажите, что любой базис Дарбу ограничения формы на подпространство расширяется до базиса Дарбу всего пространства.

Операторы, сохраняющие симплектическую форму, будем называть симплектическими.

2.2.1 Примеры лагранжевых подпространств

Изотропные подпространства имеют размерность не выше $\dim V/2$, как следует из определения и соотношения на размерность симплектического дополнения. При этом максимальные по включению изотропные подпространства лагранжевы и наоборот.

Пример. Пусть $e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n$ – базис Дарбу. Тогда $< e_1,\dots,e_n >$ и $< f_1,\dots,f_n >$ лагранжевы.

Пример. Возьмём линейное отображение $A : X \to X^*$. Тогда его график $\Gamma(A) = \{x \oplus A \cdot x \ \in X \oplus X^*\}$ лагранжев относительно симплектической формы $\omega(x\oplus\xi, y\oplus\eta) = \xi(y)-\eta(x)$, если и только если линейное отображение A самосопряжено, то есть $A = A^* : (X^*)^* \to X^*$, где $(X^*)^*$ канонически изоморфно X.

Пример. Пусть ω – симплектическая форма на V. Тогда график оператора A, $\Gamma(A) = \{v \oplus A \cdot v \ \in V \oplus V\}$, лагранжев относительно формы $\omega \oplus (-\omega)$, если и только если оператор A симплектический.

2.3 Внешняя степень симплектической формы и ориентация

Пространство полилинейных кососимметричных k-форм на V мы будем обозначать $\bigwedge^k V^*$. По k-форме α^k и l-форме β^l можно построить $(k+l)$-форму

$$\alpha^k \wedge \beta^l(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \alpha^k(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta^l(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

которая называется внешним произведением форм α^k и β^l. Здесь S_{k+l} – группа перестановок $k+l$ элементов. Обратите внимание, что переставляя индексы $1, \dots, k$ только между собой и индексы $k+1, \dots, k+l$ только между собой, мы получаем $k!l!$ равных слагаемых – на этот множитель мы и делим сумму.

Из определения вытекает $\alpha^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \alpha^k$, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ и $\alpha \wedge (C\beta + \gamma) = C\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$, где C – число.

Упражнение. Пусть $x^1, \dots, x^d$ – координатные функции на пространстве V^d. Тогда

$$x^1 \wedge \dots \wedge x^d(v_1, \dots, v_d) = \det((x^i(v_j))_{\substack{i=1\dots d \\ j=1\dots d}}).$$

Упражнение. Пусть $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n$ – координаты в базисе Дарбу формы ω. Тогда $\omega = x^1 \wedge y^1 + \dots + x^n \wedge y^n$ и $\omega^{\wedge n} = n! \cdot x^1 \wedge y^1 \wedge \dots \wedge x^n \wedge y^n$.

Из этих упражнений вытекает, что $\omega^{\wedge n}$ задаёт ориентацию на пространстве V: любому базису приписывается знак значения $2n$-формы $\omega^{\wedge n}$ на этом базисе. Например, базис Дарбу имеет знак $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Задача. Пусть B – кососимметричная матрица размера d, β – билинейная форма с матрицей B в координатах $x^1 \dots, x^d$. Тогда $\beta^{\wedge d} = \mathrm{Pf}\ B \cdot x^1 \wedge \dots \wedge x^d$, где $\mathrm{Pf}\ B$ – некоторое выражение от коэффициентов матрицы B, которое называется Пфаффианом кососимметричной матрицы B. Докажите, что $\det B = (\mathrm{Pf}\ B)^2$.

2.4 Симплектическая группа

2.4.1 Положение относительно других классических групп

Группу операторов, сохраняющих симплектическую форму, будем называть симплектической.

Из существования базиса Дарбу вытекает, что эта группа определяется лишь размерностью объемлющего пространства. Симплектическая группа в $2n$-мерном пространстве обозначается $\mathrm{Sp}(2n)$.

Если оператор сохраняет форму ω, то он сохраняет и форму $\omega^{\wedge n}$:

$$A \cdot \omega^{\wedge n} = (A \cdot \omega)^{\wedge n} = \omega^{\wedge n}.$$

Значит, симплектический оператор обязан сохранять объём, то есть его определитель равен 1 и $\mathrm{Sp}(2n) \subset \mathrm{SL}(2n)$.

Вспомним второй пример симплектической формы в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Если вещественный оператор сохраняет эрмитову форму h, то он по отдельности сохраняет её вещественную часть g и мнимую часть ω. Это следует из единственности разложения $h = g + i\omega$, где g и ω – вещественные, а также вещественности и линейности оператора.

Упражнение. Докажите, что форма g симметрична и положительно определена, а форма ω симплектическая.

Отсюда мы получаем $\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n)$, где $\mathrm{U}(n)$ – группа унитарных матриц, то есть сохраняющих эрмитову форму.

Формы g и ω выражаются друг через друга с помощью оператора комплексной структуры: $\omega(x, iy) = \operatorname{Im} h(x, iy) = \operatorname{Im} ih(x, y) = \operatorname{Re} h(x, y) = g(x, y)$, а также $\omega(x, y) = -g(x, iy)$. Поэтому симплектический оператор, коммутирующий с оператором комплексной структуры, также обязан сохранять форму g, а ортогональный оператор, коммутирующий с оператором комплексной структуры, также обязан сохранять форму ω.

Значит, $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n)$.

2.4.2 Спектр симплектического оператора

Запишем условие симплектичности оператора Φ в матричном виде:

$$\Phi^T \Omega \Phi = \Omega \iff \Omega^{-1} \Phi^T \Omega = \Phi^{-1}.$$

То есть матрицы Φ^{-1} и Φ^T подобны, а значит, их характеристические многочлены совпадают. Как известно, характеристические многочлены Φ^T и Φ также совпадают.

Утверждение. *Если λ – собственное число симплектического оператора, то λ^{-1} – тоже его собственное число.*

Так как симплектический оператор вещественный, то вместе с каждым собственным числом λ в спектре лежит его комплексно сопряжённое $\bar{\lambda}$.

Получается, что собственные числа симплектического оператора разбиваются на четвёрки $\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}$ для невещественного λ, на пары λ, λ^{-1} для вещественного не равного по модулю 1, на группу единиц и группу минус единиц.

Так как определитель симплектической матрицы равен 1, то кратность собственного числа -1 чётна. Из чётности размерности всего пространства вытекает также, что кратность единицы тоже чётна.

2.4.3 Блочный вид симплектического оператора

Пусть в базисе Дарбу симплектический оператор Φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A, B, C, D – матрицы $n \times n$.

Как было замечено выше,

$$\Phi^{-1} = \Omega^{-1}\Phi^T\Omega = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix}.$$

Видно, что обратную к симплектической матрице (как и для ортогональных матриц) можно очень быстро вычислить. Сравните с методом Гаусса в случае общих матриц.

Из условия $\Phi^{-1}\Phi = E$ получаем $(A^TC)^T = A^TC$, $(B^TD)^T = B^TD$ и $A^TD - C^TB = E$.

$(A^TC)^T = A^TC$ и $(B^TD)^T = B^TD$ равносильны тому, что оператор Φ переводит два стандартных координатных лагранжевых подпространства в лагранжевы подпространства.

Условие $A^TD - C^TB = E$ в случае $n = 1$ превращается в равенство определителя единице.

Упражнение. Зафиксируем вектор $v_0 \in V$ в симплектическом пространстве с формой ω. Докажите, что оператор $v \mapsto v + \omega(v_0, v)v_0$ симплектический. Такой оператор называется *трансвекцией*. Сравните с видом оператора симметрии в ортогональном случае.

Задача. Покажите, что симплектическая группа порождена трансвекциями.

Пусть X — линейный оператор в симплектическом пространстве и пусть $\omega(Xv, w) = \omega(v, -Xw)$ для любых векторов v, w. Такой оператор называется *гамильтоновым*. Следующее упражнение следует из классификации по Вильямсону жордановых клеток гамильтонова оператора, которую можно найти, например, в [Арн74, добавление 6]:

Упражнение. Пусть ω — симплектическая форма и X — линейный оператор на том же вещественном пространстве. Пусть $\omega(Xv, w) = \omega(v, -Xw)$ для любых векторов v, w.

а) Докажите, что если $m(\lambda)$ — минимальный многочлен, аннулирующий X, то $m(\lambda) = m(-\lambda)$.

б)* Докажите, что пространство разлагается в прямую сумму симплектических подпространств, на каждом из которых либо оператор X нильпотентен, либо имеет циклический вектор.

в) Пусть оператор X имеет циклический вектор v. Тогда $L_1 =< v, X^2v, \dots, X^{2n}v, \dots >$ и $L_2 = XL_1$ — два лагранжевых подпространства, трансверсальных друг другу.

г)* Пусть g — квадратичная форма в симплектическом пространстве. Тогда найдутся два трансверсальных лагранжевых подпространства, ортогональных относительно g.

Список литературы

[Арн74] Арнольдь В.И. *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1974.

[Винберг] Винберг Э.Б. *Курс алгебры.* МЦНМО, Москва, 2017.

3 Топология симплектической группы и лагранжева грассманиана

В дальнейшем мы будем изучать эволюцию лагранжевой плоскости, к которой применяется симплектический оператор, зависящий от времени. В связи с этим в текущем сюжете мы поговорим о симплектической группе и лагранжевом грассманиане с точки зрения алгебраической топологии. Это будет напоминать классические конструкции алгебраической топологии для ортогональной группы и многообразий Грассмана.

Сначала мы сведём вопросы связности и стягиваемости петель на симплектической группе к гомотопически ей эквивалентной унитарной группе.

Соглашение. В этой лекции мы отождествляем симплектическое пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ с эрмитовым пространством $(\mathbb{C}^n, h)$, где $\omega(x, y) = \operatorname{Im} h(x, y)$. При этом на пространстве возникает скалярное произведение $g(x, y) = \operatorname{Re} h(x, y)$, причём если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис для эрмитовой формы h, то $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ есть ортонормированный базис для скалярного произведения g и базис Дарбу для симплектической формы ω.

3.1 Деформационная ретракция $\mathrm{Sp}(2n)$ на $\mathrm{U}(n)$

Пусть $\Phi = BU$ – полярное (относительно скалярного произведения g) разложение симплектического оператора Φ. Мы хотим устроить деформационную ретракцию $\Phi \mapsto B^{1-t}U$, где $t \in [0, 1]$. При $t = 1$ оператор Φ перейдёт в U, ортогональный оператор. Как мы знаем из прошлой лекции, $\mathrm{Sp}(2n) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{U}(n)$, а значит, $U \in \mathrm{U}(n)$. Тем самым группа $\mathrm{Sp}(2n)$ стянется на подгруппу $\mathrm{U}(n)$, причём последняя остаётся при деформации неподвижной.

Шаг 1. Сначала покажем, что деформация происходит внутри группы $\mathrm{Sp}(2n)$, то есть что $B^{1-t}U = B^{-t}\Phi$ – симплектический оператор. Для этого достаточно показать, что B^t – симплектический оператор для любого t.

Напомним, что $B = (\Phi\Phi^*)^{1/2}$. Если Φ – симплектический, то и Φ^* – симплектический, что легко проверить для матриц этих операторов в базисе, являющимся одновременно ортонормированным для скалярного произведения g и базисом Дарбу для симплектической формы ω. Значит, $\Phi\Phi^*$ – симплектический.

Пусть $v_1, \ldots, v_{2n}$ – базис собственных векторов положительного оператора $\Phi\Phi^*$ и $\Phi\Phi^* v_i = \lambda_i v_i$, где $\lambda_i > 0$. Тогда $B^t v_i = (\Phi\Phi^*)^{t/2} v_i = \lambda_i^{t/2} v_i$ и

$$\omega(B^t v_i, B^t v_j) = (\lambda_i \lambda_j)^{t/2} \omega(v_i, v_j) \stackrel{?}{=} \omega(v_i, v_j).$$

Последнее равенство верно при $t = 2$, так как оператор $\Phi\Phi^* = B^2$ – симплектический, а значит, верно для любых t. Другими словами, оператор B^t – симплектический.

Упражнение. Пусть вектора v_1 и v_2 – собственные для симплектического оператора Φ, причём $\Phi v_1 = \lambda_1 v_1$ и $\Phi v_2 = \lambda_2 v_2$. Тогда $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ или вектора v_1 и v_2 косоортогональны.

Шаг 2. Непрерывность отображения $\mathrm{Sp}(2n) \times [0,1] \to \mathrm{Sp}(2n)$, где $\Phi \mapsto (\Phi\Phi^*)^{-t/2}\Phi$, следует из непрерывности отображения $\Phi \mapsto \Phi\Phi^*$, непрерывности возведения в степень на пространстве положительных операторов и непрерывности композиции операторов. Первое и третье очевидно, потому что соответствующие функции записываются многочленами от координат. Что касается непрерывности степени, мы отсылаем читателя к книге [Pedersen, §1.3], если он уже знаком с курсом функционального анализа.

Упражнение. а) Пусть $\mathfrak{u}(n)$ — алгебра Ли группы $\mathrm{U}(n)$, т.е. пространство косоэрмитовых матриц размера $n \times n$. Докажите, что $\mathrm{U}(n) = \exp(\mathfrak{u}(n))$.

Здесь $\exp\colon \mathfrak{u}(n) \to \mathrm{U}(n)$ — экспоненциальное отображение.

б) Пусть $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ — алгебра Ли группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, т.е. множество операторов A удовлетворяющих условию $\omega(Ax, y) + \omega(x, Ay) = 0$, где ω — симплектическая форма. Докажите, что $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \neq \exp(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}))$, но $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \exp(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}))\cdot\exp(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}))$.

3.2 Связность и фундаментальная группа $\mathrm{U}(n)$

Итак, обсудив гомотопическую эквивалетность $\mathrm{Sp}(2n)$ и $\mathrm{U}(n)$, перейдём к связности и к фундаментальной группе этих пространств. Сначала мы сведём задачу к группе специальных унитарных матриц $\mathrm{SU}(n)$ с помощью гомоморфизма $\det : \mathrm{U}(n) \to$ $\to \mathrm{U}(1) = S^1$, ядро которого есть $\mathrm{SU}(n)$. Затем связность и односвязность группы $\mathrm{SU}(n)$ будем доказывать по индукции по n, а шаг индукции будет осуществляться с помощью действия группы $\mathrm{SU}(n)$ на единичной сфере S^{2n-1} в $\mathbb{C}^n$ со стабилизатором $\mathrm{SU}(n-1)$. Нам понадобится пара классических теорем.

Теорема, [Bredon, §2.13]. *(1) Пусть $G \times M \to M$ – транзитивное гладкое действие группы Ли на гладком многообразии M и $x \in M$. Тогда проекция $g \mapsto g \times x$ есть локально тривиальное расслоение со слоем $\mathrm{Stab}(x)$ – стабилизатор точки p.*

(2) Пусть H – замкнутая подгруппа группы Ли G. Тогда множество смежных классов G/H обладает такой структурой гладкого многообразия, что отображение $G \to G/H$ есть гладкая проекция локально тривиального расслоения со слоем H.

Немного прокомментируем пункт (1) теоремы. При транзитивном действии стабилизаторы любой точки сопряжены, поэтому $\mathrm{Stab}(x)$ в теореме можно заменить на стабилизатор любой другой точки. Слои расслоения суть левые смежные классы по стабилизатору $\mathrm{Stab}(x)$. В нашем случае группа $\mathrm{U}(n)$ действует на окружности единичных по модулю комплексных чисел умножением на определитель: $U \times z = \det(U) \cdot z$. Стабилизатор такого действия есть группа специальных унитарных матриц $\mathrm{SU}(n)$. Отсюда мы получаем расслоение $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{U}(1)$ со слоем $\mathrm{SU}(n)$. В другом случае группа $\mathrm{SU}(n)$ действует на сфере S^{2n-1}, так как унитарные матрицы сохраняют длину. Стабилизатор такого действия есть $\mathrm{SU}(n-1)$, как показывает следующее упражнение, и отсюда мы получаем расслоение $\mathrm{SU}(n) \to S^{2n-1}$ со слоем $\mathrm{SU}(n-1)$.

Упражнение. Пусть специальная унитарная матрица размера n оставляет неподвижным первый базисный вектор. Тогда в первом столбце и первой строке этой матрицы стоят нули, кроме первого места, где стоит 1, а остальные элементы матрицы образуют специальную унитарную матрицу размера $n-1$.

Упражнение. Покажите, что $\mathrm{SU}(2)$ гомеоморфно S^3.

Теорема, [Ф.-Ф., §1.9]. *Пусть $p : E \to B$ – локально тривиальное расслоение, пространство E связно, $x \in E$, $F = p^{-1}(p(x))$ и обозначим вложение $i : F \to E$. Тогда можно определить такие гомоморфизмы $\delta_k : \pi_k(B) \to \pi_{k-1}(F)$, что следующая последовательность групп и гомоморфизмов точна:*

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{k+1}} \pi_k(F) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B) \xrightarrow{\delta_k} \ldots$$

Если мы докажем, что $\mathrm{SU}(n)$ связно, то из связности $\mathrm{U}(1)$ будет следовать, что $\mathrm{U}(n)$ связно, так как тотальное пространство расслоения со связной базой и связным слоем связно. Выпишем конец длинной точной последовательности:

$$\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{U}(n)) \xrightarrow{\det_*} \pi_1(\mathrm{U}(1)).$$

Гомоморфизм $\det_*$ сюрьективен, потому что на самом деле есть вложение $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{U}(n)$, такое что $\det$ – ретракция. Если мы докажем, что $\mathrm{SU}(n)$ односвязно, то из точности последовательности вытекает, что $\det_*$ – изоморфизм. Тем самым $\pi_1(\mathrm{U}(n)) \overset{\det_*}{\cong} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Связность $\mathrm{SU}(n)$ вытекает по индукции из связности $\mathrm{SU}(n-1)$ и S^{2n-1}. Для односвязности выпишем конец длинной точной последовательности:

$$\pi_2(S^{2n-1}) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SU}(n-1)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_1(S^{2n-1}).$$

Как известно, $\pi_2(S^{2n-1}) = \pi_1(S^{2n-1}) = \{1\}$ при любом $n \geq 2$. Значит, из точности последовательности вытекает, что $\pi_1(\mathrm{SU}(n-1))$ и $\pi_1(\mathrm{SU}(n))$ изоморфны. Поэтому $\pi_1(\mathrm{SU}(n)) \cong \pi_1(\mathrm{SU}(1)) = \{1\}$. То есть $\mathrm{SU}(n)$ односвязно.

Упражнение. Покажите, что группа $\mathrm{GL}(2n)$ транзитивно действует на пространстве симплектических форм со стабилизатором $\mathrm{Sp}(2n)$. Найдите число связных компонент и размерность этого пространства.

Указание. Для транзитивности воспользуйтесь существованием базиса Дарбу. Для компонент связности и размерности воспользуйтесь существованием локально тривиального расслоения.

Упражнение. Найдите две симплектические формы в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, которые нельзя соединить путём.

Указание. У форм должны различаться знаки определителей матриц.

3.3 Лагранжев грассманиан

Лагранжевым грассманианом $\mathcal{L}(n)$ называется множество лагранжевых подпространств в симплектическом $2n$-мерном пространстве. Так как $\mathcal{L}(n) \subset \mathrm{Gr}(2n, n)$, то топологию на $\mathcal{L}(n)$ можно индуцировать с обычного грассманиана, но мы пойдём другим путём.

3.3.1 Определение и топология

Подействуем унитарной матрицей U на лагранжево подпространство $L_0 =< e_1, \dots, e_n >_{\mathbb{R}}$, где $e_1, \dots, e_n$ – ортонормированный базис эрмитовой формы. Мы получим лагранжево подпространство $U \cdot L_0$ с ортонормированным базисом $U \cdot e_i$ в нём. Верно и обратное, и мы можем отождествить группу унитарных матриц с множеством ортонормированных базисов в лагранжевых подпространствах. Подгруппа, сохраняющая L_0, есть вещественные унитарные матрицы, то есть $O(n)$. Отсюда мы получаем, что лагранжев грассманиан можно определить, как множество левых смежных классов

$$\mathcal{L}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$$

и наделить его структурой гладкого многообразия.

Упражнение. Запишем координаты ортонормированного базиса лагранжева подпространства по столбцам матрицы $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ относительно фиксированного базиса, который есть базис Дарбу для симплектической формы и ортонормированный для скалярного произведения. Проверьте, что $X^T Y = Y^T X$, $X^T X + Y^T Y = E$ и $X + iY$ – унитарная матрица.

Упражнение. Найдите размерность $\mathcal{L}(n)$.

Упражнение. Докажите, что линейный комплекс прямых из первой лекции есть в точности $\mathcal{L}(2)$. Другими словами, плоскость $\xi \wedge \eta \in \bigwedge^2 (\mathbb{R}^4)^*$ лагранжева, если и только если $\xi \wedge \eta \wedge \omega = 0$.

Можно рассматривать ориентированные лагранжевы подпространства и положительные ортонормированные базисы в них, и аналогично получить ориентированный лагранжев грассманиан $\mathcal{L}_+(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n)$. Естественная проекция $\mathcal{L}_+(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{SO}(n) \to \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n) = \mathcal{L}(n)$ «забывания ориентации» есть двулистное накрытие.

Упражнение. Докажите, что $\mathcal{L}(1) \approx \mathcal{L}_+(1) \approx S^1$, $\mathcal{L}_+(2) \approx S^2 \times S^1$ и $\mathcal{L}(2) \approx S^2 \times S^1/\pm$, где $(x, y) \sim (-x, -y)$.

Указание для $n = 2$. Задайте лагранжев грассманиан уравнениями в $\mathbb{R}P^5$ на координаты Плюккера.

3.3.2 Фундаментальная группа

Построим коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathrm{O}(n) & \longrightarrow & \mathrm{U}(n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(n) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^0 & \longrightarrow & S^1 & \xrightarrow{(\cdot)^2} & S^1
\end{array}
\tag{2}
$$

где две вертикальные стрелочки слева – это определитель. Легко показать, что правая вертикальная стрелочка корректно определена.

На самом деле точную последовательность расслоения можно продолжить:

$$
\pi_1(\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{U}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{L}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{O}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathrm{U}(n)) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{L}(n)).
$$

Здесь уже нельзя понимать точность последовательности, как «образ стрелки совпадает с ядром следующей стрелки», потому что не все элементы последовательности являются группами. Однако в данном случае $\pi_0(\mathrm{O}(n))$ и $\pi_0(\mathrm{U}(n))$ – группы, потому что $O(n)$ и $U(n)$ – группы, поэтому точность в члене $\pi_0(\mathrm{O}(n))$ можно понимать в обычном смысле.

Послойные непрерывные отображения расслоений, например, как в диаграмме 2, дают гомоморфизмы соответствующих длинных точных последовательностей:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1(\mathrm{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathrm{U}(n)) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{L}(n)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathrm{O}(n)) & \longrightarrow & \pi_0(\mathrm{U}(n)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_1(S^0) & \longrightarrow & \pi_1(S^1) & \xrightarrow{\times 2} & \pi_1(S^1) & \longrightarrow & \pi_0(S^0) & \longrightarrow & \pi_0(S^1)
\end{array}
$$

Здесь все вертикальные стрелочки, кроме центральной, индуцированы отображением det и являются изоморфизмами. Из этого следует, что и центральная стрелочка является изоморфизмом, это называется 5-леммой. В силу тривиальности крайних членов последовательностей, в данном случае факт изоморфизма доказать проще, чем в общем случае, сделайте это самостоятельно.

Итак, мы получили, что фундаментальная группа лагранжева грассманиана $\mathcal{L}(n)$ изоморфна $\mathbb{Z}$, причём её подгруппа индекса 2 является образом фундаментальной группы пространства $\mathrm{U}(n)$. Эта же группа является образом фундаментальной группы ориентированного грассманиана $\mathcal{L}_+(n)$ при проекции двулистного накрытия. Это соответствует тому, что унитарная группа действует на ориентированном грассманиане, поэтому перенос фиксированного лагранжева подпространства петлёй из унитарных матриц сохраняет ориентацию лагранжева подпространства. Нечётным элементам $\pi_1(\mathcal{L}(n))$ соответствуют петли с разными ориентациями лагранжева подпространства в начальный момент времени и конечный.

3.4 Индекс Маслова

Резюмируем результаты этой лекции следующим определением.

Пусть $p : \mathrm{Sp}(2n) \to \mathrm{U}(n)$ – построенная ретракция, тогда $\det_* \circ p_* : \pi_1(\mathrm{Sp}(2n)) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ – изоморфизм и каждой петле γ на группе $\mathrm{Sp}(2n)$ сопоставим целое число $\mu(\gamma) = \det_* \circ p_*([\gamma]) \in \mathbb{Z}$, которое называется индексом Маслова. Это число не зависит от отмеченной точки, так как фундаментальная группа абелева[1]. Аналогично каждой петле γ на грассманиане $\mathcal{L}(n)$ сопоставим целое число $\mu(\gamma)$.

Выполнены следующие свойства:

- Если γ_1 и γ_2 – две петли на группе $\mathrm{Sp}(2n)$ с общей начальной (и конечной) точкой, то индекс Маслова композиции петель $\mu(\gamma_1 \circ \gamma_2)$ равен $\mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$.

- Если γ_1 и γ_2 – две петли на группе $\mathrm{Sp}(2n)$, то индекс Маслова их поточечного группового умножения $\mu(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ равен $\mu(\gamma_1) + \mu(\gamma_2)$.

- Для симплектического подпространства W пространства V естественно определено вложение $\mathrm{Sp}(W) \subset \mathrm{Sp}(V)$, где подразумевается, что оператор из $\mathrm{Sp}(W)$ действует на дополнении W^ω неподвижно. Тогда индекс Маслова петли на $\mathrm{Sp}(W)$ совпадает с индексом Маслова той же петли в большей группе $\mathrm{Sp}(V)$.

- Если индексы Маслова двух петель совпадают, то они гомотопны.

- Индекс Маслова петли
$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$$
на $\mathrm{Sp}(2)$ равен 1.

- Если $\gamma(t) \in \mathrm{Sp}(2n)$ и $L_0 \in \mathcal{L}(n)$, то $\mu(\gamma \cdot L_0) = 2\mu(\gamma)$.

Список литературы

[Bredon] Bredon G. *Topology and Geometry.* Springer, New York, 1993.

[Pedersen] Pedersen G. *C^*-algebras and their automorphism groups.* Academic Press, London, 1979.

[В.-О.] Винберг Э.Б., Онищик А.Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.* Издательство «Наука», Москва, 1988.

[Ф.-Ф.] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии.* Издательство «Наука», Москва, 1989.

[1] Фундаментальная группа группы Ли всегда абелева [В.-О., §1.3] и композиция петель гомотопна поточечному произведению петель.

4 Симплектоморфизмы и производящие функции

На первой лекции в сюжете про линзы у нас появлялись отображения из плоскости в себя, дифференциал которых был симплектической матрицей. Поговорим о таких отображениях подробнее.

Эта лекция посвящена анализу в $\mathbb{R}^n$. Читателя, не знакомого с исчислением дифференциальных форм и производной Ли, мы отсылаем к книге [ДНФ, §23, 25, 26].

4.1 Начальные определения

Введём в $\mathbb{R}^{2n} = (u^1, \ldots, u^{2n}) = (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$ систему координат, мы будем использовать оба обозначения. Симплектической формой мы будем называть дифференциальную 2-форму

$$\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \cdots + dx^n \wedge dy^n,$$

которая любой паре касательных векторов $v = (v^1, \ldots, v^{2n}), w = (w^1, \ldots, w^{2n})$ в любой точке сопоставляет число

$$\omega(v, w) = \omega_{ij} v^i w^j, \ (\omega_{ij}) = \Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь, к примеру, dx^1 обозначает дифференциал координатной функции x^1.

Как и любая дифференциальная 2-форма, ω есть кососимметричная билинейная форма в каждой точке $\mathbb{R}^{2n}$, определённая на парах касательных векторов в этой точке. Касательные пространства к разным точкам $\mathbb{R}^{2n}$ можно отождествить с помощью параллельного переноса и при этом отождествлении значение билинейной формы ω сохраняется, так как коэффициенты в разложении ω при $dx^i \wedge dy^i$ постоянны.

Диффеоморфизм Φ между областями в $\mathbb{R}^{2n}$, сохраняющий ω при отображении обратного образа ($\Phi^*\omega = \omega$), называется симплектоморфизмом. В координатах это значит, что матрица Якоби $D\Phi = (\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j})$ симплектическая:

$$(D\Phi)^T \Omega (D\Phi) = \Omega.$$

Во второй лекции обсуждалось, что определитель симплектической матрицы равен 1. Значит, симплектоморфизмы сохраняют объём областей в $\mathbb{R}^{2n}$, что следует из формулы замены переменной под интегралом:

$$\int\limits_{\Phi(V)} du^1 \wedge \cdots \wedge du^{2n} = \int\limits_V \det \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial u^j} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^{2n} = \int\limits_V du^1 \wedge \cdots \wedge du^{2n}.$$

В бескоординатных терминах сохранение объёма следует из того, что форма объёма пропорциональна с постоянным ненулевым коэффициентом форме $\omega^{\wedge n}$ и того, что линейный оператор, сохраняющий форму ω, должен сохранять и её внешнюю степень:

$$\omega^{\wedge n} = (-1)^{n(n-1)/2} n! \cdot du^1 \wedge \cdots \wedge du^{2n}, \ \Phi^*(\omega^{\wedge n}) = (\Phi^*\omega)^{\wedge n} = \omega^{\wedge n}.$$

4.2 Гамильтонов поток и принцип наименьшего действия

Сейчас мы построим широкий класс симплектоморфизмов $\mathbb{R}^{2n}$.

4.2.1 Определение гамильтонова потока

Гамильтоновым векторным полем X_H, построенным по гладкой функции H, которая определена в области $V \subset \mathbb{R}^{2n}$, называется векторное поле, которое однозначно определено в той же области из равенства

$$-i_{X_H}\omega = dH,$$

где i_{X_H} обозначает оператор подстановки вектора в первый аргумент дифференциальной формы, то есть $i_{X_H}\omega = \omega(X_H, \cdot)$ – это дифференциальная 1-форма. Однозначность следует из того, что указанное условие линейно по X_H в каждой точке и матрица соответствующей системы линейных уравнений $-\omega_{ij}(X_H)^i = \frac{\partial H}{\partial u^j}$ невырожденна. Решение в координатах можно записать так:

$$(X_H)^i = -\omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial u^j}.$$

И эквивалентно в (x, y)-координатах:

$$\begin{cases} \dot{x} = & -\dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} = & \dfrac{\partial H}{\partial x}. \end{cases}$$

Пусть теперь функция $H(u, t)$ также зависит от параметра времени t, пробегающего связное подмножество $\mathbb{R}$. Допустим $H(u, t)$ определена на всём $\mathbb{R}^{2n}$ для каждого t и выражение $\sum\limits_{i=1}^{2n}(\frac{\partial H}{\partial u^i})^2$ ограничено числом, не зависящим от u и t. Тогда по теореме о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения для любого (условно начального) момента времени t_0 существует поток Φ^t, такой что

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi^t(p) = & X_{H(t)}(\Phi^t(p)), \\ \Phi^{t_0} = & \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}} \end{cases}$$

для любой точки $p \in \mathbb{R}^{2n}$ и момента времени t, где $X_{H(t)}(\Phi^t(p))$ — это значение векторного поля X_H в момент времени t в точке $\Phi^t(p)$. Этот поток называется гамильтоновым.

Утверждение. *Гамильтонов поток есть семейство симплектоморфизмов.*

Доказательство. Условие $(\Phi^t)^*\omega = \omega$ для любого t можно эквивалентно переписать в дифференциальной форме: $L_{X_{H(t)}}\omega = 0$ для любого t, где L_v – это производная Ли вдоль векторного поля v. Это следует из определения производной Ли.

По цепной формуле Картана для производной Ли дифференциальных форм

$$L_{X_H}\omega = (i_{X_H}\circ d + d\circ i_{X_H})\omega = i_{X_H}d\omega + d(i_{X_H}\omega) = i_{X_H}0 + d(-dH) = 0+0,$$

где $d\omega = 0$, так как коэффициенты в разложении ω по базису $\{du^i \wedge du^j\}$ константы, и $d^2 = 0$ для любой дифференциальной формы. $\square$

4.2.2 Принцип наименьшего действия

Сейчас мы сформулируем принцип для гамильтоновых потоков, который нам важен, как мотивирующий пример для определения производящей функции, и с философской точки зрения как переход от решения системы дифференциальных уравнений к нахождению критических точек одной функции на пространстве путей.

На гладком пути $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}$ определим значение функционала действия формулой

$$S(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} x\cdot\dot{y} - \ H(x,y,t)\ dt, \tag{3}$$

где $a\cdot b$ – это стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, $x = \gamma_x(t)$ и $\dot{y} = \frac{d\gamma_y}{dt}$. Внимание на это действие обратил Гамильтон.

Утверждение. *Гамильтоновы траектории суть критические точки функционала действия на пространстве всех гладких путей $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{2n}$ с фиксированными концами.*

Доказательство. Проварьируем действие по вариации $\delta\gamma$ траектории γ. Для траектории α мы обозначаем $||\alpha|| = \sup\limits_{t\in[t_0,t_1]}\big(|\alpha(t)| + |\ \dot{\alpha}\ (t)|\big)$.

$$\delta S = S(\gamma+\delta\gamma) - S(\gamma) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta x\cdot\dot{y} + \ x\cdot\delta\dot{y} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\cdot\delta x - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\cdot\delta y\ dt +$$

$$+\, o(||\delta\gamma||) = \int\limits_{t_0}^{t_1} x\cdot\delta\dot{y}\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\delta x\cdot\left(\dot{y} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\right) + \delta y\ \cdot\left(-\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\right)\right)\ dt + o(||\delta\gamma||) =$$

$$= (x\cdot\delta y)\big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1}\dot{x}\cdot\delta y\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\delta x\cdot\left(\dot{y} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\right) + \delta y\ \cdot\left(-\frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\right)\right)\ dt + o(||\delta\gamma||) =$$

$$= x_1\cdot\delta y_1 - x_0\cdot\delta y_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\delta x\cdot\left(\dot{y} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial x}\right) + \delta y\ \cdot\left(-\dot{x} - \frac{\partial H(x,y,t)}{\partial y}\right)\right)\ dt + o(||\delta\gamma||),$$

где $(x_i, y_i) = (x(t_i), y(t_i))$.

Так как концы траектории зафиксированы, то $x_1 \cdot \delta y_1 - x_0 \cdot \delta y_0 = 0$. Значит, γ – критическая точка функционала действия S, если и только если выражения при δx и δy равны нулю при любом t, то есть γ – траектория гамильтонова потока. $\square$

Тем самым поиск решений гамильтоновых дифференциальных уравнений может быть сведён к поиску критических точек функционала S на пространстве путей. С одной стороны, искать критические точки одной функции проще, чем решать систему нелинейных уравнений, но с другой стороны пространство, на котором определена такая функция, сложнее исходного пространства.

Теперь предположим, что любая гамильтонова траектория однозначно восстанавливается по паре y-координат своих концов, то есть что x_0 и x_1 выражаются как функции от y_0 и y_1.

Тогда ограничение функционала $S(\gamma)$ на гамильтоновы траектории становится функцией $S(x_0, x_1)$. Из вычислений для вариации δS в случае гамильтоновой траектории γ следует, что $S(x_0 + \delta x_0, x_1 + \delta x_1) = S(x_0, x_1) + x_1(y_0, y_1) \cdot \delta y_1 - x_0(y_0, y_1) \cdot$ $\cdot\, \delta y_0 + o(|\delta y_1| + |\delta y_0|)$, то есть

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{\partial S}{\partial y_0}(y_0, y_1), \\ x_1 = \dfrac{\partial S}{\partial y_1}(y_0, y_1). \end{cases}$$

Пример. Любая точка (x_0, y_0) и её образ $(x_1, y_1) = (-y_0, x_0)$ под действием симплектического оператора $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ однозначно определены по $(y_0, y_1) = (-x_1, x_0)$.

Упражнение. Точка (x_0, y_0) и её образ (x_1, y_1) под действием симплектического оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ однозначно определены по (y_0, y_1), если и только если $\det C \neq 0$.

4.3 Производящие функции

4.3.1 (y_0, y_1)-производящие функции

Существование такой функции $S(y_0, y_1)$ свойственно симплектоморфизмам вообще, а не только гамильтоновым потокам:

Утверждение. *Пусть Φ – диффеоморфизм односвязных областей в $\mathbb{R}^{2n}$, причём x_0 и x_1 суть функции от y_0 и y_1, где $(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0)$. Тогда найдётся такая функция $S(y_0, y_1)$, что $x_0 = -\frac{\partial S}{\partial y_0}$ и $x_1 = \frac{\partial S}{\partial y_1}$, если и только если Φ – симплектоморфизм.*

Доказательство. Обозначим диффеоморфизмы областей в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\varphi_0 : (y_0, y_1) \mapsto (x_0(y_0, y_1), y_0), \ \varphi_1 : (y_0, y_1) \mapsto (x_1(y_0, y_1), y_1).$$

Тогда $\Phi \circ \varphi_0 = \varphi_1$.

Введём 1-форму $\lambda = x \cdot dy$ в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда $d\lambda = \omega$.

Вычислим обратные образы формы λ при отображениях φ_0 и φ_1:

$$\varphi_0^*\lambda = \varphi_0^*(x_0 dy_0) = x_0(y_0, y_1)dy_0,$$
$$\varphi_1^*\lambda = \varphi_1^*(x_1 dy_1) = x_1(y_0, y_1)dy_1.$$

Условие на функцию $S(y_0, y_1)$, что $x_0 = -\frac{\partial S}{\partial y_0}$ и $x_1 = \frac{\partial S}{\partial y_1}$, равносильно условию $dS = \varphi_1^*\lambda - \varphi_0^*\lambda$. Существование такой функции равносильно $d(\varphi_1^*\lambda - \varphi_0^*\lambda) = 0$ — в одну сторону это следует из соотношения $d^2 = 0$, а в другую – по лемме Пуанкаре для односвязной области. Далее

$$d\varphi_0^*\lambda = d\varphi_1^*\lambda \iff \varphi_0^* d\lambda = \varphi_1^* d\lambda \iff d\lambda = (\varphi_0^*)^{-1}\varphi_1^* d\lambda = \Phi^* d\lambda.$$

Последнее в точности означает, что Φ – симплектоморфизм, так как $\omega = d\lambda$.

□

Замечание. В одну сторону доказательство утверждения не использовало односвязность области. Односвязность нужна была только для леммы Пуанкаре.

Упражнение. (Лемма Пуанкаре для 1-форм.) Даны 1-форма α в односвязной области V в $\mathbb{R}^n$, дифференциал которой равен 0, и точка $p_0 \in V$. Определим функцию

$$f(p) = \int\limits_\gamma \alpha(\dot\gamma)\ dt,$$

где $\gamma(t)$ – путь с началом в p_0 и концом в p. Докажите, что значение функции f в точке p не зависит от выбора пути от p_0 до p и $df = \alpha$.

Указание. Воспользуйтесь формулой Стокса.

Упражнение. Докажите, что если производная Ли симплектической формы ω вдоль векторного поля в односвязной области равна нулю, то это векторное поле гамильтоново.

Функцию S, существование которой мы устанавливали в утверждении, будем называть (y_0, y_1)-производящей функцией или просто производящей функцией.

Пример. Пусть $\gamma(s)$ – гладкая кривая на плоскости с натуральным параметром, ограничивающая выпуклую область. На пространстве лучей с началом на кривой и входящих внутрь области введём координаты $(\cos\theta, s)$, где s – параметр начала луча, а θ – угол между вектором скорости кривой и направлением луча (ориентация угла не имеет значения, потому что мы берём cos).

Каждый такой луч пересекает кривую γ второй раз и по закону отражения мы можем построить во второй точке пересечения другой луч. Сопоставление первому лучу второго называется бильярдным отображением $(\cos\theta_0, s_0) \mapsto (\cos\theta_1, s_1)$. Очевидно, что θ_0 и θ_1 суть функции от s_0 и s_1 и

$$\frac{\partial}{\partial s_0}|\gamma(s_0) - \gamma(s_1)| = -\cos\theta_0, \ \frac{\partial}{\partial s_1}|\gamma(s_0) - \gamma(s_1)| = \cos\theta_1.$$

То есть расстояние между начальной и конечной точкой есть производящая функция, и это доказывает симплектичность бильярдного отображения.

Упражнение. Найдите симплектический оператор с производящей функцией $S = y_0 \cdot y_1$.

Упражнение. Для симплектического оператора, заданного блочной матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, у которой $\det C \neq 0$, найдите (y_0, y_1)-производящую функцию.

4.3.2 (y_0, x_1)-производящие функции

Сделав замену переменных, аналогично определим (y_0, x_1)-производящие функции:

Утверждение. *Пусть Φ – диффеоморфизм односвязных областей в $\mathbb{R}^{2n}$, причём x_0 и y_1 суть функции от y_0 и x_1, где $(x_1, y_1) = \Phi(x_0, y_0)$. Тогда найдётся такая функция $W(y_0, x_1)$, что $x_0 = \frac{\partial W}{\partial y_0}$ и $y_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}$, если и только если Φ – симплектоморфизм.*

Упражнение. Пусть симплектоморфизм допускает разные производящие функции $S(y_0, y_1)$ и $W(y_0, x_1)$. Докажите, что $S(y_0, y_1) + W(y_0, x_1(y_0, y_1)) = x_1(y_0, y_1) \cdot y_1 + C$, где C – константа.

(y_0, x_1)-производящие функции оказываются гораздо полезнее, потому что они есть у симплектоморфизмов, достаточно близких к тождественному, но об этом в следующий раз.

Упражнение. Точка (x_0, y_0) и её образ (x_1, y_1) под действием симплектического оператора $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ однозначно определены по (y_0, x_1), если и только если $\det A \neq 0$.

Список литературы

[ДНФ] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: Методы и приложения.* Издательство «Наука», Москва, 1986.

5 Симплектоморфизмы и производящие функции - 2

Мы по-прежнему предполагаем, что пространство $\mathbb{R}^{2n} = (x, y)$ снабжено стандартной симплектической формой $\omega = dx^1 \wedge dy^1 + \dots + dx^n \wedge dy^n$.

5.1 (y_0, x_1)-производящие функции: продолжение

Покажем, что симплектоморфизмы, близкие к тождественным, могут быть глобально заданы производящей функцией.

Утверждение. *Пусть дан диффеоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ и $||D\Phi - \mathrm{id}|| < \varepsilon < 1$, где $||A|| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$ есть операторная норма. Выберем координаты в $\mathbb{R}^{2n}$ (x_0, y_0) и (x_1, y_1) так, что $\Phi(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$. Тогда x_0 есть функция от y_0 и x_1.*

Доказательство. Уравнение $x_1 = \Phi_x(x_0, y_0) = x_0 + \Phi_x(x_0, y_0) - x_0$ перепишем в виде

$$x_0 = x_1 - (\Phi_x - \mathrm{id})(x_0, y_0).$$

При любых (y_0, x_1) отображение $z \mapsto x_1 - (\Phi_x - \mathrm{id})(z, y_0)$ сжимающее с коэффициентом $\varepsilon < 1$, а значит, имеет единственную неподвижную точку $x_0(y_0, x_1)$. Эта функция гладкая по теореме о неявной функции для уравнения $x_1 = \Phi_x(x_0, y_0)$, где $\det \partial\Phi_x/\partial x_0 \neq 0$, так как $||D\Phi_x - \mathrm{id}|| < 1$. $\square$

Если x_0 есть функция от y_0 и x_1, то $y_1 = \Phi_y(x_0(y_0, x_1), y_0)$ тоже.

Из утверждения раздела 4.3.2 прошлой лекции следует, что диффеоморфизм Φ, введённый выше, — симплектоморфизм, если и только если найдётся такая функция $W(y_0, x_1)$, что $x_0 = \partial W/\partial y_0$ и $y_1 = \partial W/\partial x_1$. Симплектоморфизм может быть записан в виде:

$$\Phi : (\frac{\partial W}{\partial y_0}, y_0) \mapsto (x_1, \frac{\partial W}{\partial x_1}). \tag{4}$$

5.2 Примеры

Пример: производящая функция гамильтонова симплектоморфизма. Пусть гамильтониан $H(x, y, t)$ зависит от времени и симплектоморфизм, полученный интегрированием уравнений Гамильтона за время от t_0 до t_1, имеет производящую функцию $W(y_0, x_1)$ (например, это достигается если промежуток времени $[t_0, t_1]$ достаточно мал). Тогда

$$W(y_0, x_1) = x_1 \cdot y_1(y_0, x_1) - \int\limits_{t_0}^{t_1} x \cdot \dot{y} - H(x, y, t)\ dt + C,$$

где $(x(t), y(t))$ – гамильтонова траектория с $y(t_0) = y_0$ и $x(t_1) = x_1$, C – константа.

Действительно, на прошлой лекции мы показали, что для любого касательного вектора v

$$\frac{\partial}{\partial v}\int\limits_{t_0}^{t_1} x\cdot\dot{y}-H(x,y,t)\;dt = x_1\cdot\frac{\partial y_1}{\partial v}-x_0\cdot\frac{\partial y_0}{\partial v}.$$

Значит,

$$\frac{\partial W}{\partial y_0}=x_1\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y_0}-\left(x_1\cdot\frac{\partial y_1}{\partial y_0}-x_0\right)=x_0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1}=\left(x_1\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+y_1\right)-x_1\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=y_1,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Для симплектоморфизма плоскости, допускающего производящую функцию, либо во всех точках верно $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}>0$, либо $\frac{\partial x_0}{\partial x_1}<0$. Первый случай можно условно называть близким к тождественному симплектоморфизму, а второй – близким к $-\mathrm{id}$. А условие несуществования производящей функции можно соотнести с достаточной степенью искривления симплектоморфизмом.

Упражнение. Докажите, что гамильтонов поток на плоскости для $H=e^{x^2+y^2}$ за время 1 даёт симплектоморфизм, который не раскладывается в композицию симплектоморфизмов, допускающих производящую функцию.

Пусть дана произвольная гладкая функция $W(y_0,x_1)$. Для каких функций $W(y_0,x_1)$ отношение 4 есть диффеоморфизм (а значит, симплектоморфизм)? Если научиться отвечать на такой вопрос, это позволит строить примеры симплектоморфизмов. Для таких функций всегда выполнено $\det\frac{\partial^2 W}{\partial y_0\partial x_1}\neq 0$. Действительно, пусть отношение 4 есть диффеоморфизм. Тогда гладкая функция $\frac{\partial W}{\partial y_0}=x_0(y_0,x_1)$ определяется из уравнения $x_1=\Phi(x_0,y_0)$, а значит, $\det\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\neq 0$. Условия $\det\frac{\partial^2 W}{\partial y_0\partial x_1}\neq 0$ достаточно, чтобы определять локальные симплектоморфизмы:

Упражнение. Пусть $\det\frac{\partial^2 W}{\partial y_0\partial x_1}\neq 0$. Тогда найдутся такие окрестности $U(y_0)$ и $U(x_1)$ в $\mathbb{R}^n$, что $(\frac{\partial W}{\partial y_0},y_0)\mapsto(x_1,\frac{\partial W}{\partial x_1})$ есть симплектоморфизм областей $\frac{\partial W}{\partial y_0}(U(y_0))\times U(y_0)$ и $U(x_1)\times\frac{\partial W}{\partial x_1}(U(x_1))$.

Для глобального диффеоморфизма нужно более сильное условие. Например, как в следующем упражнении.

Упражнение. Пусть функция $W(y_0,x_1)$ определена в выпуклой области D в $\mathbb{R}^{2n}$ и $\frac{\partial^2 W}{\partial y_0\partial x_1}>0$ ($A>0$, если $v\cdot Av>0$ для всех $v\neq 0$). Тогда $(\frac{\partial W}{\partial y_0},y_0)\mapsto(x_1,\frac{\partial W}{\partial x_1})$ есть симплектоморфизм между образами области D при диффеоморфизмах $(y_0, x_1) \mapsto (\frac{\partial W}{\partial y_0}, y_0)$ и $(y_0, x_1) \mapsto (x_1, \frac{\partial W}{\partial x_1})$.

С помощью предыдущего упражнения можно показать, что, наряду с группой диффеоморфизмов, группа симплектоморфизмов локально связна:

Упражнение. Пусть симплектоморфизм Φ определён на $\mathbb{R}^{2n}$ и задан производящей функцией $W(y_0, x_1)$, и $||D\Phi - \mathrm{id}|| < \varepsilon < 1$. Тогда семейство производящих функций $(1-t)W(y_0, x_1) + ty_0 \cdot x_1$ при $t \in [0, 2]$ задаёт поток симплектоморфизмов, который включает в себя тождественный симплектоморфизм.

По модулю предыдущего следующее является упражнением на производную Ли.

Упражнение. Пусть дан симплектоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ и $||D\Phi - \mathrm{id}|| < \varepsilon < 1$. Тогда Φ – гамильтонов.

Пример. Функция $W(y_0, x_1) = e^{y_0} x_1$ на плоскости определяет диффеоморфизм $(x_0, y_0) \mapsto (x_0 e^{-y_0}, e^{y_0})$ из плоскости в полуплоскость $y_1 > 0$, который сохраняет площадь. В образе в окрестности оси Ox_1 сжатие в вертикальном направлении компенсируется растяжением в горизонтальном.

Упражнение. Квадратичная форма $W(y_0, x_1)$ есть производящая функция для симплектоморфизма, если и только если симплектоморфизм линеен и $\det \frac{\partial^2 W}{\partial y_0 \partial x_1} \neq 0$.

Упражнение. Пусть $W(y_0, x_1)$ – производящая функция симплектоморфизма Φ, а $\widetilde{W}(y_1, x_0)$ – производящая функция симплектоморфизма Φ^{-1}. Тогда

$$x_0(y_0, x_1) \cdot y_0 + x_1 \cdot y_1(y_0, x_1) = \widetilde{W}(y_1(y_0, x_1), x_0(y_0, x_1)) + W(y_0, x_1).$$

Пример. Рассмотрим симплектоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$ вида $(x_0, y_0) \mapsto (x_0, f(x_0, y_0))$. Для его производящей функции выполнено

$$\frac{\partial W}{\partial y_0}(y_0, x_0) = x_0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_0}(y_0, x_0) = f(x_0, y_0),$$

откуда из первого уравнения $W = x_0 \cdot y_0 + g(x_0)$ и $f = y_0 + \nabla_{x_0} g$.

На плоскости такой симплектоморфизм есть сдвиг каждой вертикальной прямой вдоль себя, гладко зависящий от x_0. В большей размерности сдвиг нельзя выбирать произвольно, и вектор сдвига должен быть градиентом некоторой функции.

Пусть H – функция на плоскости. Тогда неподвижные точки гамильтонова потока относительно функции H суть её критические точки, а траектории потока суть открытые дуги или замкнутые кривые, которые являются компонентами связности линий уровня функции H в дополнении к множеству критических точек.

Пример: седло. Оператор, заданный матрицей $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$, симплектический. На плоскости семейство операторов $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}$ задают гамильтонов поток функции $H(x, y) = xy$. Начало координат есть единственная неподвижная точка относительно потока, причём её окрестность сжимается по вертикали и растягивается во столько же раз по горизонтали, сохраняя площадь.

Пример: кратное седло. Возьмём функцию $H = \prod_{i=1}^{k}(a_i x + b_i y)$, где $k > 1$ и вектора (a_i, b_i) попарно неколлинеарны. Нули функции H – это k прямых, пересекающихся в начале координат. Начало координат – единственная неподвижная точка потока. Растягивающиеся и сжимающиеся лучи, лежащие на прямых и выпущенные из начала координат, чередуются.

Пример: фокус. На плоскости семейство операторов $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ задают гамильтонов поток функции $H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Начало координат – единственная неподвижная точка. Остальные орбиты – концентрические окружности.

5.3 Неподвижные точки симплектоморфизмов

Мы увидим, как производящие функции помогают решать вопросы о неподвижных точках симплектоморфизмов.

Утверждение. *Пусть Φ – симплектоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$ с производящей функцией $W(y_0, x_1)$. Тогда неподвижные точки симплектоморфизма Φ суть образ критических точек функции $W - y_0 \cdot x_1$ при диффеоморфизме $(y_0, x_1) \mapsto (x_0(y_0, x_1), y_0)$.*

Доказательство. Это очевидно по определению:

$$\frac{\partial}{\partial y_0}(W - y_0 \cdot x_1) = 0 \iff x_1 = \frac{\partial W}{\partial y_0} = x_0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(W - y_0 \cdot x_1) = 0 \iff y_0 = \frac{\partial W}{\partial x_1} = y_1.$$

□

Далее мы отождествляем тор T^{2n} с $\mathbb{R}^{2n}$ по модулю целочисленных сдвигов, то есть с фактор-группой $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$. Следующее утверждение показывает, что предыдущее утверждение можно применять для гамильтоновых симплектоморфизмов тора, получая соответствие между неподвижными точками и критическими точками функции **на торе**:

Утверждение. *Пусть гамильтонов симплектоморфизм тора имеет производящую функцию $W(y_0, x_1)$. Тогда функция $W(y_0, x_1) - y_0 \cdot x_1$ периодическая.*

Доказательство. В начале подраздела 5.2 мы дали выражение для функции $W(y_0, x_1)$. Пусть $(k, l) \in \mathbb{Z}^{2n}$, тогда

$$(W(y_0 + k, x_1 + l) - (y_0 + k) \cdot (x_1 + l)) - (W(y_0, x_1) - y_0 \cdot x_1) =$$

$$= (x_0 + l) \cdot (y_0 + k) - x_0 \cdot y_0 + \int_{t_0}^{t_1} (y + k) \cdot (x \dot{+} l) - y \cdot \dot{x} - (H(x + l, y + k, t) - H(x, y, t))\, dt -$$

$$- y_0 \cdot l - k \cdot x_1 - k \cdot l = x_0 \cdot k + \int_{t_0}^{t_1} k \cdot \dot{x} \;\; dt - k \cdot x_1 = x_0 \cdot k + k \cdot x\Big|_{t_0}^{t_1} - k \cdot x_1 = 0.$$

□

Пример. Без условия гамильтоновости предыдущее утверждение неверно. Рассмотрим симплектоморфизм $\mathbb{R}^{2n}$, заданный параллельным переносом на постоянный вектор $(1/2, 0)$. Тогда производящая функция равна $W(y_0, x_1) = y_0 \cdot (x_1 - 1/2)$ и функция $W(y_0, x_1) - y_0 \cdot x_1$ непериодическая.

Утверждение. *Для любого гамильтонова симплектоморфизма тора T^{2n} найдётся функция f на $X = T^{2n} \times \mathbb{R}^{2M}$ для некоторого M, критические точки которой при проекции $X \to T^{2n}$ инъективно переходят в неподвижные точки симплектоморфизма. Причём функция f представима в виде суммы квадратичной формы индекса (M, M) и функции, градиент которой ограничен по всем координатам.*

Доказательство. Пусть симплектоморфизм получен интегрированием (нестационарного) гамильтонова векторного поля на временном отрезке $[0, 1]$. Достаточно мелко разобьём отрезок $[0, 1] \ni 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{2N} = 1$, так чтобы для симплектоморфизмов $\Phi_i = \Phi_{t_i}^{t_{i+1}}$ (полученных интегрированием гамильтонова векторного поля за время от t_i до t_{i+1}) существовала производящая функция $W_i(y_i, x_{i+1})$ при чётном i и производящая функция $W_i(x_i, y_{i+1})$ при нечётном i. По определению производящей функции

$$\frac{\partial W_{2j}}{\partial y_{2j}}(y_{2j}, x_{2j+1}) = x_{2j}, \frac{\partial W_{2j}}{\partial x_{2j+1}}(y_{2j}, x_{2j+1}) = y_{2j+1} \iff \Phi_{2j}(x_{2j}, y_{2j}) = (x_{2j+1}, y_{2j+1}),$$

$$\frac{\partial W_{2j-1}}{\partial y_{2j}}(x_{2j-1}, y_{2j}) = x_{2j}, \frac{\partial W_{2j-1}}{\partial x_{2j-1}}(x_{2j-1}, y_{2j}) = y_{2j-1} \iff \Phi_{2j-1}(x_{2j-1}, y_{2j-1}) = (x_{2j}, y_{2j}).$$

Неподвижные точки симплектоморфизма Φ_0^1 определяют цепочку

$$(x_0,y_0)\overset{\Phi_0}{\mapsto}(x_1,y_1)\overset{\Phi_1}{\mapsto}\cdots\overset{\Phi_{2N-2}}{\mapsto}(x_{2N-1},y_{2N-1})\overset{\Phi_{2N-1}}{\mapsto}(x_0,y_0).$$

Такие цепочки находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функции

$$W(y_0,x_1,\ldots,y_{2N-2},x_{2N-1})=W_0(y_0,x_1)-W_1(x_1,y_2)+\cdots-W_{2N-1}(x_{2N-1},y_0),$$

где из критической точки $(y_0,x_1,\ldots,y_{2N-2},x_{2N-1})$ однозначно восстанавливается неподвижная точка $(\frac{\partial W_0}{\partial y_0}(y_0,x_1),y_0)$ симплектоморфизма Φ_0^1.

Перейдём к координатам, в которых функция W становится периодичной по некоторым переменным. А именно, напомним, что функции $W_{2j}(y_{2j},x_{2j+1})-y_{2j}\cdot x_{2j+1}$ и $W_{2j-1}(x_{2j-1},y_{2j})-x_{2j-1}\cdot y_{2j}$ периодические, тогда

$$W=y_0\cdot x_1-x_1\cdot y_2+\cdots+y_{2N-2}\cdot x_{2N-1}-x_{2N-1}\cdot y_0+\widetilde{W}(y_0,x_1,\ldots,y_{2N-2},x_{2N-1}),$$

где $\widetilde{W}$ – периодическая. Неограниченная часть в этом выражении есть квадратичная форма. Приведём её к стандартному виду заменой базиса.

$$\begin{aligned}
&y_0\cdot x_1-x_1\cdot y_2+\cdots+y_{2N-2}\cdot x_{2N-1}-x_{2N-1}\cdot y_0=\\
&\quad=y_0\cdot(x_1-x_{2N-1})+y_2\cdot(x_3-x_1)+\cdots+y_{2N-2}\cdot(x_{2N-1}-x_{2N-3})=\\
&\quad=-y_0\cdot(x_3'+x_5'+\cdots+x_{2N-1}')+y_2\cdot x_3'+\cdots+y_{2N-4}\cdot x_{2N-3}'+y_{2N-2}\cdot x_{2N-1}'=\\
&\quad=(y_2-y_0)\cdot x_3'+(y_4-y_0)\cdot x_5'+\cdots+(y_{2N-2}-y_0)\cdot x_{2N-1}'=\\
&\quad=y_2'\cdot x_3'+y_4'\cdot x_5'+\cdots+y_{2N-2}'\cdot x_{2N-1}'.
\end{aligned}$$

Видно, что ядро квадратичной формы получилось двумерным. Действительно, вектора $(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ и $(0,\ldots,0,1,\ldots,1)$ в исходных координатах порождают ядро. В результате замены координат

$$\begin{aligned}
y_0=y_0,\ x_1=x_1,\\
y_2'=y_2-y_0,\ \ldots,\ y_{2N-2}'=y_{2N-2}-y_0,\\
x_3'=x_3-x_1,\ \ldots,\ x_{2N-1}'=x_{2N-1}-x_{2N-3}
\end{aligned}$$

функция $\widetilde{W}$ осталась периодичной, а функция

$$W=y_2'\cdot x_3'+y_4'\cdot x_5'+\cdots+y_{2N-2}'\cdot x_{2N-1}'+\widetilde{W}(y_0,x_1,y_2',x_3',\ldots,y_{2N-2}',x_{2N-1}')$$

стала периодичной по переменным y_0 и x_1. Тем самым мы получили искомую функцию на $T^{2n}\times\mathbb{R}^{2n(N-1)}$. $\square$

6 Теорема Конли-Цендера

6.1 Неподвижные точки симплектоморфизмов кольца

Теорема Пуанкаре-Биркгофа. *Пусть диффеоморфизм* Φ *кольца* $S^1 \times [0,1] = \{(\theta, q),\ \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, q \in [0,1]\}$ *сохраняет площадь и не переставляет компоненты границы, причём скручивает их в разные стороны, то есть*

$$\Phi(\theta_0, 0) = (\theta_1, 0) \implies \theta_0 < \theta_1,$$

$$\Phi(\theta_0, 1) = (\theta_1, 1) \implies \theta_0 > \theta_1.$$

Тогда Φ *имеет хотя бы две неподвижные точки.*

Пуанкаре доказывает [P1912] эту теорему в некоторых частных случаях и пишет о её возможном применении в небесной механике, а именно к задаче о трёх телах. Теорема доказана в полной общности Биркгофом [B1913].

Условие закручивания компонент границы в разные стороны существенно, потому что поворот кольца $(\theta, q) \mapsto (\theta+\theta_0, q)$ на ненулевой угол сохраняет площадь и не имеет неподвижных точек.

Пример. Ровно две неподвижные точки на кольце имеет диффеоморфизм, полученный интегрированием стационарного гамильтонова векторного поля в течение достаточно малого промежутка времени, где гамильтониан H имеет ровно две критические точки. Примером такой функции H может служить произведение квадратов расстояний до двух данных точек на плоскости. Эта функция имеет два минимума и одно седло, которое вместе с его сепаратрисами образует лемнискату Бернулли. Кольцо в данном случае – это область, ограниченная двумя линиями уровня функции H, а именно: маленьким замкнутым контуром вокруг одного из минимумов и большим контуром, который ограничивает область, содержащую все особенности функции H.

Замечание. Если функция постоянна вдоль границы кольца и градиент функции вдоль обеих компонент границы направлен наружу кольца (или вдоль обеих внутрь), то меньше двух критических точек у функции быть не может. Действительно, из условия у функции в некоторой внутренней точке кольца есть минимум (максимум). От этого минимума (максимума) расходятся замкнутые контуры – линии уровня функции, причём эти контуры в некоторый момент должны перестроиться, потому что граница кольца состоит из двух контуров линий уровня. То есть контуры должны наткнуться на ещё одну критическую точку функции.

6.2 Неподвижные точки симплектоморфизмов сферы

В.И. Арнольд в 1965–1966 годах предложил ряд гипотез, обобщающих теорему Пуанкаре-Биркгофа. Он высказал предположение, что количество неподвижных точек гамильтоновых симплектоморфизмов должно быть не меньше, чем число критических точек некоторой функции на том же пространстве, на котором определён симплектоморфизм. Вот ещё одна иллюстрация этой гипотезы.

Теорема. *Пусть диффеоморфизм двумерной сферы S^2 сохраняет площади и ориентацию. Тогда диффеоморфизм имеет как минимум две неподвижные точки.*

Условие сохранения ориентации существенно, так как антиподальное отображение сферы сохраняет площади и не имеет неподвижных точек.

Для существования одной неподвижной точки условие сохранения площади не требуется. Существование неподвижной точки следует из ненулёвости числа Лефшеца, напомним, как строится это число. Пусть M – замкнутое ориентированное многообразие. Тогда числом Лефшеца $L(f)$ гладкого отображения $f : M \to M$ называется альтернированная сумма следов оператора обратного образа f^* в когомологиях над полем $\mathbb{R}$:

$$L(f) = \sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \mathrm{tr}\, (f^* : H^k(M) \to H^k(M)).$$

Теорема Лефшеца говорит, что это число равно сумме индексов неподвижных точек, если их количество конечно:

$$L(f) = \sum_{p=f(p)} \mathrm{ind}\, p,$$

где индексом $\mathrm{ind}\, p$ изолированной неподвижной точки p отображения f многообразия в себя называется индекс векторного поля $f(u) - u$ вдоль замкнутого контура вокруг точки p, не содержащего других неподвижных точек, где u – вектор, составленный из локальных координат в некоторой карте, содержащей точку p.

Неподвижные точки отображения f соответствуют точкам пересечения графика $\Gamma(f) = \{(z, f(z)) \in M \times M\}$ с диагональю $\Delta(M) = \{(z, z) \in M \times M\}$. Поэтому доказательство теоремы Лефшеца можно вывести из того, что пересечение гомологических классов подмногообразий двойственно по Пуанкаре $\smile$-произведению двойственных по Пуанкаре к данным подмногообразиям когомологических классов:

$$\sum_{p=f(p)} \mathrm{ind}\, p = \mathrm{PD}\, ([\Gamma(f)] \cdot [\Delta(M)]) = \mathrm{PD}\, [\Gamma(f)] \smile \mathrm{PD}\, [\Delta(M)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k \mathrm{tr}\, (f^* : H^k(M) \to H^k(M)).$$

Подробности можно посмотреть в книжке [Bredon, §6.12].

Замечание. Если применить теорему Лефшеца к диффеоморфизму, полученному интегрированием векторного поля на достаточно малом временном интервале (чтобы векторное поле обращалось в ноль ровно в неподвижных точках диффеоморфизма), то получится известное равенство суммарного индекса векторного поля эйлеровой характеристике многообразия. Действительно, любое отображение, гомотопное тождественному, действует в когомологиях тривиально, а значит, альтернированная сумма следов превращается в альтернированную сумму чисел Бетти, что равняется эйлеровой характеристике.

Вернёмся к сфере. Как известно,

$$H^0(S^2,\mathbb{R})=\mathbb{R},\ H^1(S^2,\mathbb{R})=0,\ H^2(S^2,\mathbb{R})=\mathbb{R}.$$

Нульмерные (сингулярные) когомологии любого линейно связного топологического пространства одномерны, первые когомологии сферы тривиальны, потому что все петли на сфере стягиваются, а старшие (в данном случае двумерные) когомологии любого связного замкнутого ориентируемого многообразия одномерны. На нульмерных когомологиях линейно связного топологического пространства любое непрерывное отображение пространства в себя действует тривиально. Действие на старших когомологиях замкнутого ориентированного многообразия всегда сводится к умножению на целое число, которое совпадает со степенью отображения – это число прообразов регулярной точки, посчитанное со знаками, в зависимости от того, что касательное пространство прообраза отображается в касательное пространство образа с сохранением ориентации $(+)$ или с обращением $(-)$. Например, отображение сферы $S^2=\mathbb{CP}^1$ в себя $(z:w)\mapsto(z^n:w^n)$ имеет степень n. Данный нам диффеоморфизм сохраняет ориентацию, а значит, имеет степень 1. Поэтому

$$\sum_{p=f(p)}\operatorname{ind}p=2.$$

Упражнение. Постройте на двумерной сфере векторное поле с одной особой точкой. (Такое поле не может иметь замкнутых траекторий, и интегрирование такого векторного поля на любом ненулевом временном интервале даёт диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию, с одной неподвижной точкой.)

Существование второй неподвижной точки вытекает из условия сохранения площади и следующего утверждения:

Утверждение. *Изолированная неподвижная точка диффеоморфизма поверхности, сохраняющего площадь, имеет индекс не больше 1.*

Обсудим доказательство этого утверждения на идейном уровне. Если диффеоморфизм обращает ориентацию, то в окрестности неподвижной точки найдётся «линия симметрии», целиком состоящая из неподвижных точек, поэтому диффеоморфизм из условия обязан сохранять ориентацию.

На поверхности диффеоморфизм является или не является симплектоморфизмом независимо от формы площади – условие равенства якобиана единице не зависит от координат, поэтому мы можем считать, что в окрестности неподвижной точки выбрана такая система координат (x, y), что форма площади записывается в стандартном виде $dx \wedge dy$.

Тогда матрица Якоби в неподвижной точке сопряжена одной из матриц

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем достаточно малую окрестность неподвижной точки и координаты в окрестности с началом в неподвижной точке, такие что диффеоморфизм можно представить в виде $A+\psi$, где A – линейный оператор, матрица которого есть матрица Якоби диффеоморфизма, а $||D\psi|| < \inf\limits_{|v|=1} |Av - v|$ во всей окрестности. В первом случае при $\alpha \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и во втором случае при $\lambda \neq 1$ такие окрестность и координаты найдутся. Тогда по лемме о даме с собачкой индекс неподвижной точки равен индексу неподвижной точки оператора A, то есть в первом случае $+1$, а во втором случае индекс равен -1.

В третьем случае диффеоморфизм вместе с производной сколь угодно близок к тождественному в некоторой окрестности. По утверждению из раздела 5.1, такой диффеоморфизм обладает производящей функцией, то есть

$$(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_1) \iff x_0 = \frac{\partial W}{\partial y_0}(y_0, x_1), \ y_1 = \frac{\partial W}{\partial x_1}(y_0, x_1).$$

Посчитаем индекс векторного поля $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ в координатах (x_1, y_0).

Вообще говоря, векторные поля $v(x_0, y_0) = (x_1(x_0, y_0) - x_0, y_1(x_0, y_0) - y_0)$ и $w(x_1, y_0) = (x_1 - x_0(x_1, y_0), y_1(x_1, y_0) - y_0)$ не получаются друг из друга заменой координат $(x_0, y_0) \mapsto (x_1, y_0)$. Также неверно, что поле w можно записать, как $\Phi - \mathrm{id}$ в координатах (x_1, y_0), где Φ – данный по условию диффеоморфизм сферы. Векторное поле w получается параллельным переносом вектора v в точке (x_0, y_0) в точку (x_1, y_0), то есть $w(x_1, y_0) = v(x_1(x_0, y_0), y_0)$. Такое преобразование может изменить динамику векторного поля, например, уничтожить замкнутые орбиты. Но индекс векторного поля, очевидно, сохраняется при таком преобразовании.

Индекс равен индексу векторного поля

$$(x_1 - x_0(y_0, x_1), y_1(y_0, x_1) - y_0) = (x_1 - \frac{\partial W}{\partial y_0}, \frac{\partial W}{\partial x_1} - y_0) = (-\frac{\partial}{\partial y_0}(W - y_0 x_1), \frac{\partial}{\partial x_1}(W - y_0 x_1)).$$

Повернём это векторное поле на угол $\pi/2$ и получим градиентное поле $\nabla(W - y_0 x_1)$. Тем самым утверждение сводится к следующему:

Утверждение. *Индекс изолированной особой точки градиентного поля функции на плоскости не больше 1.*

Это утверждение следует из топологической классификации изолированных особенностей гладких функций на плоскости. А именно, в некоторой окрестности изолированной критической точки p гладкой функции f найдётся такая непрерывная система координат (u, v), гладкая вне особой точки, что

$$f = \begin{cases} \pm(u^2 + v^2), & \text{если } \operatorname{ind} p = 1; \\ u^3 + v^2 u, & \text{если } \operatorname{ind} p = 0; \\ \prod\limits_{i=0}^{k}(a_i u + b_i v), & \text{если } \operatorname{ind} p = -k, \end{cases}$$

где в третьем случае вектора (a_i, b_i) попарно неколлинеарны. В первом случае линии уровня – концентрические окружности, во втором – кривые, однозначно проецирующиеся на ось Ou. Третий случай – это седло кратности k с $2(k+1)$ сепаратрисами, выходящими из критической точки. Отметим, что второй случай можно рассматривать как седло кратности 0.

Негладкость в одной точке замены координат допускает, что в исходных координатах (x, y) сепаратрисы могли закручиваться в бесконечные спирали вокруг критической точки.

Для классификации, среди прочего, необходимо проанализировать прообраз критического значения внутри изолирующей окрестности. Этот прообраз состоит из критической точки и некоторого подмногообразия в дополнении к критической точке. Подмногообразие не может содержать ни замкнутых компонент, ни дуг, оба конца которых лежат на границе изолирующей окрестности, ни дуг, оба конца которых совпадают с критической точкой. В любом из трёх случаев возникает семейство компонент линий уровня, которому негде перестроиться. В первом случае замкнутую компоненту нужно столкнуть внутрь области, которую она ограничивает. Получается семейство кривых, на каждой из которых функция постоянна, причём по параметру семейства функция монотонна, поэтому на критическую точку кривые натолкнуться не могут – противоречие с тем, что диск не расслаивается на окружности. Аналогично можно прийти к противоречию во втором случае, сталкивая дугу в ту область изолирующей окрестности, где лежит критическая точка, и в третьем случае, сталкивая петлю внутрь области, которую она ограничивает. Поэтому прообраз критического значения есть точка, из которой выходит чётное (возможно, нулевое) число дуг с концами на границе изолирующей окрестности. Этим наброском мы и ограничимся.

На самом деле топологическая классификация особенностей здесь не нужна. Для доказательства того, что индекс особой точки градиентного поля не превосходит 1, достаточно следующего технически более простого утверждения:

Утверждение. *Пусть граница диска не содержит критических точек гладкой функции f. Тогда индекс градиентного поля вдоль границы диска не больше 1.*

В отличие от предыдущего рассуждения, мы не накладываем никаких ограничений на функцию внутри диска и не будем анализировать поведение данной нам функции. Наоборот, мы будем менять функцию внутри диска, сохраняя направление её градиента в некоторой окрестности границы, а значит, не изменяя индекс.

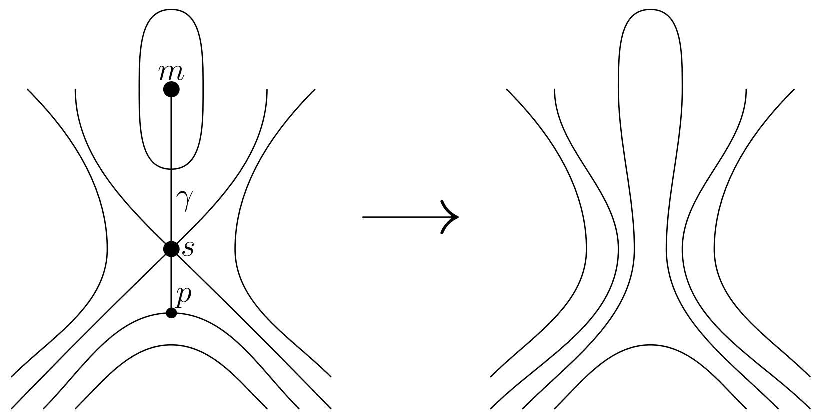

Рис. 1: Изменение линий уровня на шаге 2

Возмутим функцию так, чтобы она стала морсовской, то есть в каждой критической точке матрица вторых производных стала невырожденна. Критические точки морсовской функции на плоскости суть локальные минимумы, локальные максимумы или (некратные) сёдла. Все они изолированны, а значит, на диске в силу компактности их количество конечно. До возмущения количество критических точек могло быть бесконечным. Также в результате возмущения количество критических точек могло увеличиться. Например, седло кратности k может распасться на k некратных сёдел, а может, например, распасться на 1 локальный максимум и $k+1$ некратное седло.

Если локальных минимумов или максимумов нет, то индекс неположительный, так как индекс равен сумме индексов особых точек, а индекс седла равен -1. В противном случае найдётся локальный максимум m (минимум). Если, кроме него, особенностей нет, то индекс равен 1. Пусть тогда ещё найдутся особенности.

График функции в окрестности точки m — это вершина некоторой горы. Среди всех особенностей, до которых можно дойти от вершины, строго спускаясь с горы, выберем особенность s с максимальным значением функции $f(s)$. Траектория спуска – это дуга γ, соединяющая m с седлом s, трансверсальная линиям уровня в своих внутренних точках. Горой будем называть часть графика функции f, которая находится над замыканием связной компоненты, содержащей точку m, множества точек x, где $f(x) > f(s)$. Подножием будем называть ту часть горы, где $f = f(s)$. Подножие может содержать несколько сёдел.

Мы хотим спилить всю эту гору, заменить её почти плоским диском и разгладить седло s, так чтобы у функции стало на две особенности меньше и тем самым всё будет доказано по индукции.

Спиливание будет происходить в два шага. Продлим дугу γ за седло до некоторой точки p, так чтобы продолжение дуги было также трансверсально линиям уровня. Тогда $f(p) > f(s)$.

Шаг 1. Во всех точках горы вне некоторой окрестности подножия заменим функцию f на функцию вида $g(f)$ так, чтобы её максимум значения на горе был меньше $f(p)$ и чтобы не добавилось критических точек. При такой замене направление градиента

в каждой точке не меняется, потому что линии уровня сохраняются.
Шаг 2. Теперь в окрестности дуги γ можно изменить функцию так, чтобы сократить локальный максимум и седло. Грубо говоря, можно уменьшать длину дуги, закрепив её концы, чтобы она стала отрезком. Поверхность устремится за движением дуги и особенности пропадут, как на картинке 1.

Техника, которой мы пользовались при обсуждении утверждений об индексе градиентного поля, называется теорией Морса. Она изложена, например, в книжке [Милнор].

6.3 Неподвижные точки симплектоморфизмов тора

Спустя почти 20 лет после того, как Арнольд сформулировал гипотезы, Конли и Цендер [CZ83] доказали теорему:

Теорема. *Гамильтонов симплектоморфизм тора T^{2n} со стандартной симплектической формой имеет хотя бы $2n+1$ неподвижную точку.*

Мы говорим, что диффеоморфизм тора $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ сохраняет центр масс, если для его представления диффеоморфизмом Φ пространства $\mathbb{R}^{2n}$, где $\Phi(u+k) = \Phi(u)+k$ для любых $u \in \mathbb{R}^{2n}$ и $k \in \mathbb{Z}^{2n}$, выполнено

$$\int\limits_{u\in[0,1]^{2n}} \Phi(u) - u \; d\mathrm{Vol} \in \mathbb{Z}^{2n},$$

где $d\mathrm{Vol}$ – стандартная форма объёма в $\mathbb{R}^{2n}$.

Гамильтонов симплектоморфизм тора обязан сохранять центр масс. Действительно, достаточно показать, что среднее гамильтонова поля равно нулю:

$$\int\limits_{u\in[0,1]^{2n}} X_H \; d\mathrm{Vol} = 0.$$

Компоненты векторного поля X_H суть частные производные периодической функции H, а значит, по теореме Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial H}{\partial u^i} \; d\mathrm{Vol} = \int\limits_{[0,1]^{2n-1}} \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial H}{\partial u^i} \; du_i \right) \; d\mathrm{Vol}' = 0.$$

Верно обратное:

Упражнение. Если симплектический поток Φ^t на торе T^{2n} сохраняет центр масс для любого t, то он гамильтонов.

Поэтому в теореме Конли-Цендера условие гамильтоновости можно заменить условием сохранения центра масс и изотопности тождественному в классе симплектоморфизмов – мы говорим, что диффеоморфизм Φ изотопен тождественному в заданном классе, если существует поток Φ^t, такой что $\Phi^0 = \mathrm{id}$, $\Phi^1 = \Phi$ и Φ^t принадлежит заданному классу для любого t.

В случае двумерного тора условие изотопности тождественному в классе симплектоморфизмов можно заменить условием гомотопности тождественному отображению или тривиальности действия в гомологиях. При $n > 1$ неизвестно, можно ли заменить изотопность тождественному в классе симплектоморфизмов хотя бы на изотопность в классе диффеоморфизмов.

Упражнение. Докажите, что для любого диффеоморфизма тора существует единственный параллельный перенос тора, такой что их композиция сохраняет центр масс.

Если в теореме Конли-Цендера дополнительно потребовать, что все неподвижные точки диффеоморфизма Φ невырожденны, то есть

$$\Phi(p) = p \implies \det(D\Phi(p) - \mathrm{id}) \neq 0$$

(что достигается сколь угодно малым изменением гамильтониана), то количество неподвижных точек оценивается снизу числом 2^{2n}, что аналогично неравенству Морса о том, что количество критических точек морсовской функции не меньше суммы чисел Бетти, которая в случае тора как раз равна 2^{2n}. В общем случае число критических точек функции на компактном многообразии не меньше, чем категория Люстерника-Шнирельмана $+\ 1$, что для тора равно $2n + 1$.

Конли и Цендер рассмотрели функционал действия ((3), раздел 4.2.2) на пространстве петель ΩT^{2n}. Для периодичного по времени гамильтониана (периодичности можно добиться, не меняя получаемый за время 1 симплектоморфизм, число неподвижных точек которого оценивается) критические точки функционала суть в точности периодические траектории (с периодом 1) гамильтонова потока, которые суть в точности неподвижные точки симплектоморфизма.

Они доказали, что все критические точки функционала лежат на конечномерном подмногообразии пространства петель, которое однозначно проецируется на медленно осциллирующие петли, то есть на пространство первых нескольких коэффициентов $2n$ рядов Фурье, которое диффеоморфно $T^{2n} \times \mathbb{R}^{2nN}$ (множителю T^{2n} отвечают константы). Функционал становится обычной функцией, которая отличается от некоторой квадратичной формы сигнатуры (nN, nN) на функцию, градиент которой ограничен по всем координатам.

В разделе 5.3 мы свели к этому случаю задачу о неподвижных точках с помощью производящих функций. Этот метод принадлежит Шаперону [Chap84].

Пример. Чтобы построить гамильтонов симплектоморфизм тора с k неподвижными точками, достаточно предъявить гамильтониан с k критическими точками, причём если критические точки функции невырожденны, то соответствующие неподвижные точки симплектоморфизма также будут невырожденны. Следующая функция имеет 3 критических точки на двумерном торе:

$$H(x, y) = \sin 2\pi x + \sin 2\pi y - \sin 2\pi(x + y).$$

Следующая функция имеет 2^{2n} невырожденных критических точек на T^{2n}:

$$H(u) = \prod_{i=1}^{2n}(2 + \sin 2\pi u_i).$$

6.3.1 Сведение случая кольца к тору

Пусть $H(\theta, q, t)$ – гамильтониан на кольце $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1]$, ∇H перпендикулярен границе и направлен в одну относительно кольца сторону вдоль компонент границы при любом t. Тогда интегрирование гамильтонова поля X_H за время 1 даёт симплектоморфизм, удовлетворяющий условию теоремы Пуанкаре-Биркгофа. Определим гамильтониан I на кольце $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [-a, b + 2]$, где $a > 0$ и $b > 0$:

$$I(\theta, q, t) = \begin{cases} H(\theta, 0, t), & \text{если } q \in [-a, 0]; \\ H(\theta, q, t), & \text{если } q \in [0, 1]; \\ H(\theta, 1, t), & \text{если } q \in [1, b]; \\ H(\theta, b + 2 - q, t), & \text{если } q \in [b + 1, b + 2]. \end{cases}$$

Склеим это кольцо в тор по $(\theta, -a) \sim (\theta, b + 2)$. Мы получим гамильтониан на торе. Его нужно сгладить в окрестности $q = 0$, $q = 1$, $q = b + 1$, $q = b + 2$, меняя только на кольцах $-a < q < 0$ и $1 < q < b + 1$, причём сохраняя симметричность гамильтониана на каждом из этих колец. Рассмотрим симплектоморфизм, который получается интегрированием гамильтонова поля X_I за время 1.

Так как на кольце $0 < q < 1$ гамильтониан симметричен ограничению гамильтониана на кольцо $b+1 < q < b+2$, то среднее сдвига симплектоморфизма на объединении этих колец есть вектор, направленный вдоль направления $\frac{\partial}{\partial\theta}$. Тогда подбирая числа a и b мы можем добиться того, чтобы симплектоморфизм тора сохранял центр масс. Из теоремы Конли-Цендера следует, что неподвижных точек хотя бы 3, а значит, в исходном кольце есть хотя бы 2 неподвижные точки.

Замечание. Здесь мы рассматривали тор с фундаментальным прямоугольником $[0, 1] \times [0, a+b+2]$, поэтому такой тор отличается формой площади от тора в формулировке теоремы Конли-Цендера. Однако такой тор можно отобразить на стандартный, сжав по оси q. При этом условие сохранения диффеоморфизмом центра масс не нарушается, а равенство якобиана единице не зависит от координат вовсе. Поэтому теорема Конли-Цендера для тора с фундаментальным прямоугольником $[0, 1] \times [0, a + b + 2]$ следует из уже сформулированной.

Доказательство теоремы Конли-Цендера мы завершим в следующей лекции.

Список литературы

[Арнольд] Арнольд В. Первые шаги симплектической топологии, *УМН* **41** (1986), в. 6 (252), 3–18.

[Милнор] Милнор Дж. *Теория Морса.* Мир, Москва, 1965.

[Ник74] Никишин Н.А. О неподвижных точках диффеоморфизмов двумерной сферы, сохраняющих ориентированную площадь. *Функциональный анализ и его приложения* **8** (1974), в. 1, 84–85.

[B1913] Birkhoff G. Proof of Poincaré's last geometric theorem. *Transactions of AMS* **14** (1913), no. 1, 14–22.

[Bredon] Bredon G. *Topology and Geometry.* Springer, New York, 1993.

[Chap84] Chaperon M. Une idée du type «geodesiques brisée» pour les systemes hamiltoniens. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **298** (1984), no. 13, 293–296.

[CZ83] Conley C., Zehnder E. The Birkhoff-Lewis Fixed Point Theorem and a Conjecture of V.I. Arnold. *Inventiones mathematicae* **73** (1983), 33–49.

[P1912] Poincaré H. Sur un théorème en géométrie. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **33** (1912), 375–407.

7 Когомологическая длина и критические точки

Эта лекция целиком посвящена оценке снизу числом $2n+1$ количества критических точек такой функции f на $X = T^{2n} \times \mathbb{R}^{2M}$, которая представима в виде суммы квадратичной формы индекса (M, M) и функции, градиент которой ограничен по всем координатам.

Пример. На стандартной сфере S^k функция высоты имеет ровно 2 критических точки и меньше двух критических точек на замкнутом многообразии быть не может. Наоборот, если критических точек всего две, то такое многообразие гомеоморфно k-мерной сфере [Reeb46].

Пример. Разобьём квадрат, из которого склеен тор, на два треугольника диагональю квадрата. Построим функцию, у которой

- максимум (минимум) в центре первого (второго) треугольника;
- постоянна на сторонах треугольников;
- прообраз любого регулярного значения связен.

Тогда у такой функции 3 критических точки, причём в вершине квадрата находится седло с 3 парами сепаратрис.

Пример. Предыдущий пример очевидным образом обобщается на $4g$-угольник, у которого противоположные стороны отождествлены так, чтобы получалась ориентированная поверхность (рода g), разбитый на два многоугольника главной диагональю. Получается 3 критических точки, причём в вершине $4g$-угольника находится седло с $g+2$ парами сепаратрис.

Замечание. На любом связном компактном многообразии размерности k существует функция с $k+1$ критическими точками.

Пусть Φ^t — градиентный поток на $X = T^{2n} \times \mathbb{R}^{2M}$ функции f относительно стандартной метрики. Все критические точки функции f заведомо лежат в объединении ограниченных орбит

$$S = \{x \in X |\ \exists C\ \forall t \in \mathbb{R}\ |\Phi^t(x)| < C\}.$$

Очевидно, что S инвариантно относительно потока Φ^t. Преимущество множества S по сравнению с исходным X – это компактность:

Утверждение. *Пусть функция на $X = T^{2n} \times \mathbb{R}^{2M}$ есть сумма $f = g(x_1, y_1, \ldots, x_M, y_M) + V(z, x_1, y_1, \ldots, x_M, y_M)$, где g — квадратичная форма индекса (M, M) и для некоторой константы C верно $|\nabla V| < C$ во всех точках. Тогда объединение S ограниченных орбит градиентного потока Φ^t функции f компактно.*

Доказательство. Выберем в $\mathbb{R}^{2M}$ такие координаты $x'_1, y'_1 \ldots, x'_M, y'_M$, что $g = \sum\limits_1^M (x'_i)^2 - \sum\limits_1^M (y'_i)^2$. Пусть в новых координатах $|\nabla V| < C'$ во всех точках для некоторой константы C'. Тогда вне множества

$$B = \left\{ \sum_1^M (x'_i)^2 \le (C'/2+1)^2,\ \sum_1^M (y'_i)^2 \le (C'/2+1)^2 \right\}$$

любая точка уносится потоком на бесконечность либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. Значит, $S \subset B$. Так как B ограничено, то $S = \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} \Phi^t(B)$. Так как B — компактно (и все $\Phi^t(B)$ компактны), то и S компактно как пересечение компактных подмножеств. $\square$

Граница множества B состоит из двух подмножеств

$$B^- = \left\{ \sum_1^M (x'_i)^2 = (C'/2+1)^2,\ \sum_1^M (y'_i)^2 \le (C'/2+1)^2 \right\},$$
$$B^+ = \left\{ \sum_1^M (x'_i)^2 \le (C'/2+1)^2,\ \sum_1^M (y'_i)^2 = (C'/2+1)^2 \right\},$$

причём любая траектория, входящая в B, входит через B^+, а дальше она либо стремится к S, либо выходит через B^-.

Пример. Положим $n = 0$, $M = 1$, $f = x^2 - y^2$. Тогда $S = \{(0,0)\}$ и $B = [-1,1]\times[-1,1]$ – изолирующее множество для S. Все траектории, выходящие из квадрата B, выходят через две противоположных стороны $[-1,1] \times \{-1,1\}$ квадрата.

Пример. Положим $n = 0$, $M = 1$ и B — множество, построенное в утверждении выше. Тогда f имеет хотя бы одну критическую точку, так как иначе одну сторону квадрата B можно было бы непрерывно продеформировать (используя градиентный поток) в другую сторону квадрата, оставляя вершины неподвижными, что невозможно. Можно рассуждать по-другому: индекс поля ∇f вдоль границы квадрата равен -1, значит, найдётся особая точка.

Пример. Положим $n = 0$, $M > 1$ и B — множество, построенное в утверждении выше. Тогда f имеет хотя бы одну критическую точку, так как иначе часть $D^M \times S^{M-1}$ границы множества B можно было бы непрерывно продеформировать (используя градиентный поток) в другую часть $S^{M-1} \times D^M$, оставляя подмножество $S^{M-1} \times S^{M-1}$ неподвижным, что невозможно, так как $D^M \times S^{M-1}$ и $S^{M-1} \times D^M$ заклеивают разные элементы гомотопической группы $\pi_{M-1}(S^{M-1} \times S^{M-1})$.

В общем случае для оценки числа критических точек мы используем аналог теории Люстерника-Шнирельмана. Так как множество S может не быть локально односвязным, то нужны методы, работающие для довольно широкого класса пространств. Мы будем работать с компактными метрическими пространствами.

7.1 Когомологическая длина

Когомологической длиной топологического пространства X называется максимальное l, такое что найдутся классы ненулевой степени $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in H^*(X)$, $\smile$-произведение которых ненулевое:

$$\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_l \neq 0.$$

Замечание. Вообще говоря, когомологическая длина зависит от коэффициентов и выбора теории когомологий H^*.

Пример. Стандартные координаты $u^1, \dots, u^{2n}$ на торе T^{2n} дают $2n$ замкнутых дифференциальных форм $du^1, \dots, du^{2n}$. Если взять $\smile$-произведение их классов в когомологиях де Рама, то получится форма объёма:

$$[du^1] \smile \cdots \smile [du^{2n}] = [du^1 \wedge \cdots \wedge du^{2n}],$$

так как внешнее умножение замкнутых дифференциальных форм соответствует умножению в кольце когомологий де Рама. Поэтому $l(T^{2n}) = 2n$. Когомологическая длина многообразия не может быть больше его размерности, так как когомологии степени выше, чем размерность многообразия, все нулевые.

7.2 Градиентоподобные потоки

Непрерывное отображение $\Phi : \mathbb{R} \times S \to S$ называется градиентоподобным потоком на S, если найдётся такая непрерывная функция $f : S \to \mathbb{R}$, что

- $\Phi^t := \Phi(t, \cdot)$ – гомеоморфизм S для всех $t \in \mathbb{R}$ и $\Phi^0 = \mathrm{id}$;
- для любого p либо $f(\Phi^t(p)) > f(p)$ при $t > 0$, либо $\Phi^t(p) = p$ для любого t и тогда точка p называется критической.

Соглашение. Далее под когомологиями мы имеем в виду когомологии Александера-Спеньера (или, эквивалентно, когомологии Чеха) с коэффициентами в $\mathbb{R}$.

Утверждение. *Градиентоподобный поток Φ^t относительно функции f на компактном метрическом пространстве S имеет не меньше $l(S) + 1$ критических точек.*

Доказательство. Будем считать, что критических точек конечное количество, иначе всё доказано.

Пусть a — второе по величине критическое значение функции. Тогда

$$V = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \Phi^t f^{-1}(a, +\infty)$$

открыто и стягивается потоком при $t \to +\infty$ на конечное число точек, которые являются максимумами функции. В частности, когомологии V в положительных градуировках нулевые.

Дополнение $A = S\setminus V$ компактно. Докажем, что $l(S) \le l(A)+1$. Это всё доказывает по индукции по числу критических точек.

Пусть $l = l(A) + 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l+1} \in H^{>0}(S)$, $\alpha = \alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_l$. Докажем, что $\alpha \smile \alpha_{l+1} = 0$. По предположению $\alpha\big|_A = 0$. Значит, элемент α лежит в образе естественного отображения $H^*(S, A) \to H^*(S)$. В коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{cccccccccc}
\tilde\alpha & \times & \tilde\alpha_{l+1} & \in & H^{>0}(S,A) & \times & H^{>0}(S,V) & \xrightarrow{\smile} & H^{>0}(S,A\cup V)=0 & \ni 0\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow\\
\alpha & \times & \alpha_{l+1} & \in & H^{>0}(S) & \times & H^{>0}(S) & \xrightarrow{\smile} & H^{>0}(S) & \ni \alpha\cup\alpha_{l+1}\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & & 0 & & H^{>0}(A) & & H^{>0}(V)=0 & & &
\end{array}$$

столбцы — это фрагменты из точной последовательности пары, а первые две строки — это $\smile$-умножение, где $H^*(X,Y) \times H^*(X,Z) \xrightarrow{\smile} H^*(X, Y\cup Z)$ определено всякий раз, когда Y и Z каждое по отдельности замкнутое или открытое (ср. с сингулярными когомологиями, где замкнутости недостаточно). Так как $A \cup V = S$, то элемент $\alpha \cup \alpha_{l+1}$ лежит в образе нулевого отображения. $\square$

В случае локально стягиваемых пространств, утверждение можно усилить. Пусть $\operatorname{cat}(S) + 1$ – минимальное количество элементов покрытия открытыми множествами с тривиальными когомологиями в положительных градуировках.

Упражнение. $l(X) \le \operatorname{cat}(S)$.

Упражнение. Градиентоподобный поток на компактном локально стягиваемом метрическом пространстве S имеет не меньше $\operatorname{cat}(S) + 1$ критических точек.

Упражнение. Как мы знаем, на замкнутой поверхности S рода g существует функция с 3 критическими точками. Также известно, что $l(S) = 2$. Из предыдущих упражнений тогда следует, что $\operatorname{cat}(S) = 2$. Постройте покрытие поверхности тремя стягиваемыми открытыми множествами.

Упражнение. Докажите, что не существует инвариантного относительно антиподальной инволюции непрерывного отображения сфер $S^d \to S^{d-1}$. С помощью этого покажите, что для любых d непрерывных функций на сфере S^d найдётся две противоположных точки, в которых все функции совпадают.

7.3 Завершение доказательства теоремы Конли-Цендера

Мы возвращаемся к обозначениям S, B, B^- и Φ^t, введённым в начале раздела. Докажем, что $l(S) = 2n$, из этого будет следовать оценка на число критических точек.

Пусть $A^- = \bigcap\limits_{t>0} \Phi^t B$.

Пример. При $n = 0$, $M = 1$ и $f = x^2 - y^2$ множество A^- – это пара нестабильных сепаратрис.

Тогда $S = \bigcap\limits_{t<0} \Phi^t A^-$ — это пересечение убывающей цепочки компактных множеств, где любой больший элемент цепочки стягивается на любой меньший. По непрерывности когомологий гомоморфизм ограничения $H^*(A^-) \to H^*(S)$ есть изоморфизм. Аналогично во фрагменте точной последовательности пары $H^*(B, B^- \cup A^-) \to H^*(B) \to H^*(B^- \cup A^-)$ вторая стрелка есть изоморфизм, а первый член нулевой.

Пусть $\alpha \in H^{2n}(B)$ — класс, который есть обратный образ класса формы объёма на T^{2n} при проекции $B = T^{2n} \times D^M \times D^M \to T^{2n}$. Если $\alpha\big|_S \neq 0$, то всё доказано, ограничение этого класса раскладывается в произведение $2n$ классов ненулевой степени.

Пусть $\beta \in H^M(B, B^-) \cong H^M(B/B^-)$ — класс, который есть обратный образ класса формы объёма на S^M при проекции $B/B^- = T^{2n} \times S^M \times D^M \to S^M$. Тогда $\alpha \smile \beta \in$ $\in H^{2n+M}(B, B^-)$ — класс, который есть обратный образ класса формы объёма на $T^{2n} \times S^M$ при проекции $B/B^- = T^{2n} \times S^M \times D^M \to T^{2n} \times S^M$.

Пусть $\alpha\big|_S = 0$. Тогда из коммутативной диаграммы мы приходим к противоречию с $\alpha \cup \beta \neq 0$:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\tilde{\alpha} & \times & \beta & \in & H^{2n}(B, A^-) & \times & H^M(B, B^-) & \overset{\smile}{\to} & H^{2n+M}(B, A^- \cup B^-) = 0 & \ni 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & \downarrow \\
\alpha & \times & \beta & \in & H^{2n}(B) & \times & H^M(B, B^-) & \overset{\smile}{\to} & H^{2n+M}(B, B^-) & \ni \alpha \cup \beta \\
\downarrow & & & & \downarrow & & & & & \\
0 & & & & H^{2n}(A^-) & \cong H^{2n}(S) & & & &
\end{array}$$

Замечание. Последнее рассуждение, взятое из [CZ83] и идея которого принадлежит Бенчи, фактически доказывает, что ограничение когомологий $H^*(T^{2n}) \cong H^*(B) \to$ $\to H^*(S)$ есть мономорфизм (это следует из того, что любой ненулевой когомологический класс тора делит класс формы объёма). Оказывается, если заменить во всех рассуждениях T^{2n} любым компактным многообразием, то гомоморфизм ограничения также будет мономорфизмом. Это доказал Флоер [Floer87].

7.4 Когомологии Александера-Спеньера

Напоследок скажем пару слов о когомологиях, которые были определены Александером [Alex35] для компактных метрических пространств и Спеньером для всех топологических пространств, которые также совпадают с когомологиями Чеха [Dow52] на классе всех топологических пространств и со всеми теориями когомологий на классе компактных многообразий.

Пример. Пусть $(z, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – координаты на цилиндре и

$$A = \{(z, 0)|\ z \in [-1, 1]\} \cup \left\{ \left(\sin\frac{1}{\varphi}, \varphi \right) \mid \varphi \in (0, \frac{1}{\pi}) \right\} \cup \left\{ (0, \varphi)|\ \varphi \in [\frac{1}{\pi}, 2\pi] \right\}$$

есть синус-кривая на цилиндре. Сингулярные когомологии A — как у точки. Однако любая открытая окрестность синус-кривой A не односвязна.

Когомологии Александера-Спеньера синус-кривой такие же, как у окружности. Это следует из того, что A есть пересечение замкнутых колец и непрерывности когомологий Александера-Спеньера.

Упражнение. Заменим топологию пространства X минимальной не менее тонкой локально линейно связной топологией. Такая топология состоит из компонент линейной связности открытых множеств в исходной топологии. Полученное пространство обозначим $\approx\!\!\!\!X$. Покажите, что сингулярные комплексы пространств X и $\overset{\approx}{X}$ совпадают. Покажите, что если A — синус-кривая, то $\overset{\approx}{A}$ стягиваемо (в этом случае изменение топологии равносильно отодвиганию вертикального отрезка синус-кривой от её бесконечной складки). Выведите отсюда совпадение сингулярных когомологий синус-кривой и точки.

Непрерывность когомологий. Пусть $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ – убывающая последовательность компактных подмножеств метрического пространства X и пусть любое вложение $i_{nm} : A_n \to A_m$ индуцирует изоморфизм когомологий $i^*_{nm} : H^*(A_m) \to H^*(A_n)$. Обозначим пересечение $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда каждое вложение $i_n : A \to A_n$ индуцирует изоморфизм когомологий $i^*_n : H^*(A_n) \to H^*(A)$.

Замечание. Непрерывность когомологий можно использовать в динамике для вычисления когомологий инвариантных подмножеств, у которых есть окрестность, которая на них сжимается потоком. В этом случае, вообще говоря, поток не даёт деформационной ретракции на инвариантное подмножество, которой было бы достаточно для совпадения сингулярных когомологий окрестности с сингулярными когомологиями инвариантного подмножества.

Доказательство совпадения разных теорий когомологий на классе клеточных пространств сводится к проверке аксиом Эйленберга-Стинрода и построения гомоморфизма из одной теории в другую [Vick, §4]. При этом можно проверить коммутирование гомоморфизма с $\smile$-умножением.

Построение гомоморфизма из когомологий де Рама в сингулярные когомологии – это теорема де Рама [Bredon, §5.9], а построение гомоморфизма из коголомологий де Рама в когомологии Чеха можно посмотреть в книжке [Bott-Tu, T. 14.28]. Построение гомоморфизма из когомологий Александера-Спеньера в сингулярные когомологии можно посмотреть в книге [Spanier, §6.6]. Проверку непрерывности и остальных аксиом можно посмотреть для когомологий Александера-Спеньера в [Spanier, §6.4-6] и для когомологий Чеха в [Bredon, §2.14].

Суть доказательства непрерывности заключена в следующей лемме:

Лемма. *Пусть X — компактное метрическое пространство и $A \subset X$ замкнуто.*

- *Пусть $u \in H^*(X)$ и $u\Big|_A = 0$. Тогда найдётся такая окрестность $U \supset A$, что $u\Big|_U = 0$.*
- *Пусть $u \in H^*(A)$. Тогда найдётся такая окрестность $U \supset A$ и $\tilde{u} \in H^*(U)$, что $\tilde{u}\Big|_A = u$.*

Список литературы

[Alex35] Alexander J. On the ring of a compact metric space. *PNAS* **21** (1935), no. 8, 511–512.

[Bott-Tu] Bott R., Tu L. *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer, New York, 1982.

[Bredon] Bredon G. *Sheaf Theory.* McGraw Hill, 1967.

[Bredon] Bredon G. *Topology and Geometry.* Springer, New York, 1993.

[Con78] Conley C. *Isolated invariant sets and the Morse index*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **38**, AMS, Providence, R.I., 1978.

[CZ83] Conley C., Zehnder E. A global fixed point theorem for symplectic maps and subharmonic solutions of Hamiltonian equations of tori. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **45** (1983), Part 1, 283–299.

[CLOT] Cornea O., Lupton G., Oprea J., Tanré D. *Lusternik-Schnirelmann Category*, Mathematical Surveys and Monographs **103**, AMS, Providence, R.I., 2003.

[Dow52] Dowker C. Homology groups of relations. *Annals of Mathematics* **56** (1952), no. 2, 84–95.

[Floer87] Floer A. A refinement of the Conley index and an application to the stability of hyperbolic invariant sets. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **7** (1987), 93–103.

[Reeb46] Reeb G. Sur les points singuliers d'une forme de Pfaff complétement intégrable ou d'une fonction numérique. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **222** (1946), 847–849.

[Spanier] Spanier E. *Algebraic Topology.* McGraw-Hill, 1966.

[Vick] Vick J. *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology.* Academic Press, New York, 1973.

8 Обобщение задачи Штурма

Наша ближайшая цель — представить индекс Маслова петли на лагранжевом грассманиане, как число моментов вертикальности соответствующей лагранжевой плоскости. Также мы введём индекс тройки лагранжевых плоскостей.

В качестве иллюстрирующего примера мы выбрали поток на всём лагранжевом грассманиане, порождённый дифференциальным уравнением второго порядка на конфигурационном пространстве. Изложение будет следовать работе [Арн85].

Индекс Маслова возникает в разных задачах, упомянем работу [Арн67], где даются формулы, в которые входит индекс Маслова, для асимптотик решений уравнения Шрёдингера. Смотрите также [Арн74, Добавление 11: Коротковолновые асимптотики].

8.1 Формулировка теорем о неколеблемости и нулях

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение на функцию $x(t)$ на вещественной прямой с коэффициентами $a(t)$ и $b(t)$, зависящими от времени, где $b(t) > 0$ при всех t:

$$\frac{d}{dt}(b(t)\dot{x}(t)) + a(t)x(t) = 0.$$

Штурм [Sturm] показал, что если $a(t) < 0$ для всех t, то при любых начальных условиях решение $x(t)$ имеет не больше одного нуля.

Пример. Решения уравнения $\ddot{x} = k^2 x$ имеют вид $x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}$. Если $C_1 C_2 > 0$, то нулей нет, иначе нуль единственный.

Также без ограничений на $a(t)$ либо два решения пропорциональны, либо между любыми двумя нулями одного решения должен находиться нуль другого решения.

Пример. Решения уравнения $\ddot{x} = -k^2 x$ имеют вид $x = C\cos(kt+\varphi_0)$. Если начальные фазы φ_0 у решений совпадают, то они пропорциональны. Если не совпадают, то нули двух решений чередуются.

Арнольд [Арн85] обобщил результаты Штурма в следующем смысле. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\frac{d}{dt}(B(t)\dot{x}(t)) + A(t)x(t) = 0, \tag{5}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$ и $B(t)$ – симметричные вещественные матрицы размера n и $B(t)$ положительно определена для всех t.

Так как матрица B невырождена, имеем право сделать замену координат (зависящую от времени): $p = B\dot{x}, q = x$. В координатах p, q система 5 принимает вид гамильтоновых уравнений

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \\ \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

с гамильтонианом $H = (B^{-1}p, p)/2 + (Aq, q)/2$, где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение.

Уравнения Гамильтона получились линейными, а значит, гамильтонов поток состоит из линейных операторов и, в частности, переводит линейные подпространства $\mathbb{R}^{2n}$ в линейные подпространства. Так как гамильтонов поток состоит из симплектоморфизмов, то лагранжевы плоскости поток переводит в лагранжевы плоскости. Мы получаем поток на лагранжевом грассманиане $\mathcal{L}(n)$.

Лагранжево подпространство назовём вертикальным, если оно содержит ненулевой вектор с $q = 0$. Вместо нулей уравнения Штурма будем рассматривать моменты вертикальности траектории лагранжева подпространства.

Пример. Вернёмся к случаю $n = 1$. Лагранжев грассманиан состоит из всех прямых на плоскости, проходящих через начало координат. Решение $x(t)$ уравнения Штурма определяет прямую $(b\dot{x}(t), x(t))$. Это однозначное соответствие между траекториями потока на грассманиане и решениями уравнения Штурма, взятыми с точностью до пропорциональности. При этом нули решения $x(t)$ соответствуют моментам вертикальности лагранжева подпространства.

Следующие две теоремы принадлежат Арнольду.

Пусть $L(t)$ — лагранжево подпространство, вектора которого суть траектории гамильтонова потока относительно функции $H(p, q, t) = (B^{-1}p, p)/2 + (Aq, q)/2$, где $A(t) = A^T(t)$, $B(t) = B^T(t)$ и $B(t) > 0$ для всех t.

Теорема о неколеблемости. *Если $A(t)$ отрицательно определена при всех t, то число моментов вертикальности $L(t)$ не превосходит n.*

Пусть $L'(t)$ — ещё одно аналогичное лагранжево подпространство.

Теорема о нулях. *Если на отрезке $[a, b]$ подпространство $L(t)$ имеет $n+1$ момент вертикальности, то подпространство $L'(t)$ имеет хотя бы 1 момент вертикальности на этом же отрезке.*

Отметим, что теорема о неколеблемости моментально следует из теоремы о нулях. Действительно, при $A(t) < 0$ величина $\sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i$ строго возрастает под действием потока $\dot{p} = -Aq$, $\dot{q} = B^{-1}p$ для любого ненулевого начального вектора (p, q):

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n} p^i q^i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{p}^i q^i + p^i \dot{q}^i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left((-Aq)^i q^i + (B^{-1}p)^i p^i\right) = (-Aq, q) + (B^{-1}p, p) > 0.$$

А значит, любой вектор лагранжева подпространства $p = q$ никогда не станет вертикальным. По теореме о нулях число моментов вертикальности любого другого лагранжева подпространства не превосходит n.

Пример. Пусть $n = 1$, $B = -A = E$. Тогда уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{p} = q$, $\dot{q} = p$, а решение имеет вид $p = ce^t - de^{-t}$, $q = ce^t + de^{-t}$. Прямые $p = \pm q$ инвариантны, а любая другая прямая сносится потоком к прямой $p = q$.

Пример. Пусть $n = 1$, $B = A = E$. Тогда уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{p} = -q$, $\dot{q} = p$, а решение имеет вид $p = -c\sin t + d\cos t$, $q = c\cos t + d\sin t$. Любая прямая крутится с постоянной угловой скоростью, и между двумя моментами вертикальности одной прямой есть момент вертикальности любой другой.

Замечание. Верно, что любой поток на лагранжевом грассманиане, который индуцирован потоком на пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, может быть индуцирован гамильтоновым потоком с квадратичным гамильтонианом (то есть как в теоремах Арнольда). Квадратичность гамильтониана равносильна линейности уравнений Гамильтона, что равносильно тому, что поток состоит из линейных операторов. Условия линейности и симплектичности диффеоморфизмов потока связаны с тем, что любое лагранжево подпространство поток переводит снова в лагранжево подпространство. Условие гамильтоновости можно получить, например, из следующего упражнения.

Упражнение.

1. Пусть $\Phi(t)$ — симплектическая матрица для любого t, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\Omega\dot{\Phi}\Phi^{-1}$ — симметричная матрица.

2. Поток из симплектических операторов $\Phi(t)$ гамильтонов с гамильтонианом $H(u, t) = (\Omega\dot{\Phi}\Phi^{-1}u, u)/2$.

3. Пусть A — симметричная матрица. Тогда операторы $\exp(\Omega At)$ симплектические.

8.2 Доказательство теоремы о неколеблемости

Внимательнее приглядимся к величине $\sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i$, которая нам позволила свести теорему о неколеблемости к теореме о нулях. Начнём с того, что ограничение этой квадратичной формы на эволюционирующее лагранжево подпространство становится вырожденным ровно тогда, когда подпространство нетрансверсально подпространству $q = 0$ или подпространству $p = 0$.

Пример. Пусть $n = 1$. Ограничение формы pq на прямую L вырожденно, если и только если L вертикальна или горизонтальна.

Лемма 1. *Пусть α, β и L — лагранжевы подпространства в симплектическом пространстве с формой ω, α и β трансверсальны и пусть $Q_{\alpha,\beta}$ — такая квадратичная форма, что для любого вектора v выполнено $Q_{\alpha,\beta}(v) = \omega(v_\alpha, v_\beta)$, если $v = v_\alpha + v_\beta$, где $v_\alpha \in \alpha$ и $v_\beta \in \beta$. Тогда*

$$\ker Q_{\alpha,\beta}\big|_L = (L \cap \alpha) \oplus (L \cap \beta).$$

Доказательство. Выберем базис Дарбу так, чтобы $\alpha = \{q = 0\}$ и $\beta = \{p = 0\}$. Тогда по определению $Q_{\alpha,\beta}(p, q) = \sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i$.

Значение соответствующей билинейной формы на паре векторов v и w равно $Q_{\alpha,\beta}(v, w) = \frac{1}{2}(\omega(v_\alpha, w_\beta) - \omega(v_\beta, w_\alpha))$, где $v = v_\alpha + v_\beta$, $w = w_\alpha + w_\beta$, $v_\alpha, w_\alpha \in \alpha$ и v_β, $w_\beta \in \beta$.

Пусть $v \in L \cap \alpha$ и $w \in L$. Тогда $v_\beta = 0$ и, так как $w(v, w) = 0$, то $Q_{\alpha,\beta}(v, w) = 0$. Значит, $L \cap \alpha \subset \ker Q_{\alpha,\beta}\big|_L$. Аналогично $L \cap \beta \subset \ker Q_{\alpha,\beta}\big|_L$.

Пусть $v \in \ker Q_{\alpha,\beta}\big|_L$ и $w \in L$. Тогда $Q_{\alpha,\beta}(v, w) = 0$ и $\omega(v, w) = 0$. Из этого следует, что $\omega(v_\alpha, w_\beta) = 0$ и $\omega(v_\beta, w_\alpha) = 0$. Докажем, что $v_\alpha \in L$.

Вектор v_α косоортогонален проекции вектора w на плоскость β вдоль α для любого $w \in L$. Проекция L на β имеет размерность $n - \dim L \cap \alpha$. Значит, множество векторов плоскости α, косоортогональных проекции L на β имеет размерность $\dim L \cap \alpha$ (так как ω отождествляет α с двойственным пространством β^*). Однако мы уже показали, что $L \cap \alpha \subset \ker Q_{\alpha,\beta}\big|_L$. Значит, $v_\alpha \in L \cap \alpha$. Аналогично $v_\beta \in L \cap \beta$ и, значит, $\ker Q_{\alpha,\beta}\big|_L \subset (L \cap \alpha) \oplus (L \cap \beta)$.

$\square$

Теперь разберёмся, как меняется сигнатура квадратичной формы $\sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i$, ограниченной на эволюционирующее лагранжево подпространство, при прохождении через моменты нетрансверсальности подпространствам $\{q = 0\}$ и $\{p = 0\}$.

Пример. Пусть $n = 1$, $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Прямые крутятся с постоянной скоростью. Сигнатура ограничения формы pq меняется с 1 на -1 при совпадении с прямой $\{p = 0\}$ и меняется обратно при совпадении с прямой $\{q = 0\}$.

Пример. Пусть $n = 1$, $H = \frac{1}{2}(p^2 - q^2)$. Сигнатура ограничения формы pq меняется с -1 на 1 при совпадении с горизонтальной прямой или с вертикальной и дальше сохраняется.

Лемма 2. *Пусть α и β — трансверсальные лагранжевы подпространства, $Q_{\alpha,\beta}$ — форма из предыдущей леммы, пусть вектора лагранжева подпространства $L(t)$*

суть траектории гамильтонова потока относительно квадратичной формы $H(t)$, и пусть $H(t_0)$ невырожденна на $L(t_0) \cap \alpha$ и $L(t_0) \cap \beta$. Тогда найдётся $\varepsilon > 0$, что для любого t_1, такого что $t_0 < t_1 < t_0 + \varepsilon$,

$$\operatorname{sign} Q_{\alpha,\beta}\big|_{L(t_1)} = \operatorname{sign} Q_{\alpha,\beta}\big|_{L(t_0)} + \operatorname{sign} H(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\alpha} - \operatorname{sign} H(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\beta}.$$

Доказательство. Выберем базис Дарбу так, чтобы $\alpha = \{q = 0\}$ и $\beta = \{p = 0\}$. Тогда по определению $Q_{\alpha,\beta}(p,q) = \sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i$.

Пусть $H(p,q,t) = \frac{1}{2}((Aq,q) + (2Cq,p) + (Bp,p))$ — квадратичный гамильтониан общего вида, где $A = A^T$ и $B = B^T$.

Тогда уравнения Гамильтона принимают вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C^T & -A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Теперь можем найти, как меняется функция $Q_{\alpha,\beta}$ вдоль траекторий потока:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} p^i q^i = \sum_{i=1}^{n} (\dot{p}^i q^i + p^i \dot{q}^i) = (-Aq - C^T p, q) + (p, Cq + Bp) = (-Aq,q) + (Bp,p).$$

Выберем базисы подпространств $L(t_0) \cap \alpha$ и $L(t_0) \cap \beta$ и дополним их до базиса всего $L(t_0)$. По лемме 1 матрица формы $Q_{\alpha,\beta}$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix},$$

где нули означают нулевые матрицы некоторого размера и S невырожденна.

Теперь будем действовать на базис потоком, получая базис подпространства $L(t)$, и запишем в нём матрицу той же формы $Q_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{pmatrix} Rt & 0 & 0 \\ 0 & Ut & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t) & o(1) & o(1) \\ o(1) & o(t) & o(1) \\ o(1) & o(1) & o(1) \end{pmatrix},$$

где R и $-U$ — матрицы ограничения формы H на подпространства $L(t_0) \cap \alpha$ и $L(t_0) \cap \beta$ соответственно, по условию R и U невырожденны. Изначально мы могли выбрать базисы так, чтобы любой главный угловой минор матриц R, U и S был ненулевым. Найдётся достаточно малое $\varepsilon > 0$, что при всех временах t, таких что $0 < t < \varepsilon$, все главные угловые миноры большой матрицы будут совпадать по знаку с соответствующими главными угловыми минорами матрицы

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

По методу Якоби, количество перемен знака в последовательности главных угловых миноров совпадает с индексом формы, то есть с количеством минусов в нормальном виде формы. Значит, сигнатура формы $Q_{\alpha,\beta}\big|_{L(t)}$ получается из сигнатуры формы $Q_{\alpha,\beta}\big|_{L(t_0)}$ прибавлением числа $\operatorname{sign} H(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\alpha} - \operatorname{sign} H(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\beta}$.
□

Замечание. Аналогично на интервале $t_0 - \varepsilon < t_1 < t_0$ верно

$$\operatorname{sign} Q_{\alpha,\beta}\big|_{L(t_1)} = \operatorname{sign} Q_{\alpha,\beta}\big|_{L(t_0)} - \operatorname{sign} H(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\alpha} + \operatorname{sign} H(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\beta}.$$

Замечание. Случаи $L(t_0)\cap\alpha = 0$ и $L(t_0)\cap\beta = 0$ не требуют специального рассмотрения и рассуждения в них аналогичны.

Из лемм 1 и 2 теорема о неколеблемости сразу следует. Моменты вертикальности подпространства $L(t)$ изолированы, а при прохождении через момент вертикальности сигнатура формы $(\sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i)\big|_{L(t)}$ увеличивается хотя бы на 2, так как форма $H\big|_{q=0}$ положительно определена и форма $H\big|_{p=0}$ отрицательно определена. Сигнатура может меняться и в другие моменты, а именно когда $L(t)$ нетрансверсально $\{p=0\}$ и трансверсально $\{q=0\}$, но опять же он лишь увеличивается. Сигнатура может меняться лишь в пределах от $-n$ до n, а значит, больше чем на $2n$ она не может увеличиться. Значит, моментов вертикальности не больше n.

8.3 Доказательство теоремы о нулях

Предположим, что $L(t)$ и $L'(t)$ трансверсальны в какой-то момент времени (а значит, и в любой). Как и прежде, посмотрим, как меняется сигнатура формы $Q_{L(t),L'(t)}\big|_{\{q=0\}}$.

Чтобы формально применить лемму 2, нам нужно перейти в систему координат $(p'(t,p,q), q'(t,p,q))$, в которой подпространства $L(t)$ и $L'(t)$ неподвижны. Возьмём, например, координаты

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

где $\Phi(t)$ — матрица симплектоморфизма из потока в координатах (p,q).

Тогда подпространство $\{q=0\}$ в новой системе координат будет сдвигаться потоком $\Phi^{-1}(t)$. Гамильтониан этого потока равен $-H(t)$.

Проверим условия леммы 2. По условию теоремы форма $-H\big|_{\{q=0\}}$ отрицательно определена, а значит, невырожденна на подпространствах $\{q=0\}\cap L(t_0)$ и $\{q=0\}\cap L'(t_0)$. Значит, при переходе через момент времени t_0 сигнатура формы $Q_{L(t),L'(t)}\big|_{\{q=0\}}$ изменяется на число $-2\dim(\{q=0\}\cap L(t_0)) + 2\dim(\{q=0\}\cap L'(t_0))$.

Если бы на отрезке $[a, b]$ у подпространства $L'(t)$ не было моментов вертикальности, то тогда бы сигнатуры формы $Q_{L(t),L'(t)}\big|_{\{q=0\}}$ в момент a и в момент b отличались бы хотя бы на $2n + 2$ (так как у $L(t)$ хотя бы $n + 1$ момент вертикальности), что невозможно.

Осталось свести общий случай к случаю трансверсальных $L(t)$ и $L'(t)$. Основная идея состоит в том, что трансверсальность — это условие общего положения, а именно:

Утверждение. *Множество лагранжевых подпространств, трансверсальных данному лагранжеву подпространству, открыто и всюду плотно в лагранжевом грассманиане.*

Мы вернёмся к доказательству этого утверждения в следующей лекции.

Пусть теперь $L(a)$ и $L'(a)$ нетрансверсальны. Найдётся последовательность L'_k лагранжевых подпространств трансверсальных $L(a)$, сходящаяся к $L'(a)$ в топологии лагранжева грассманиана. Подействуем на лагранжевы подпространства L'_k потоком и получим для любого $t \in [a, b]$ последовательность подпространств $L'_k(t)$ трансверсальных $L(t)$, которая при $k \to +\infty$ сходится к $L'(t)$.

По доказанному ранее, для каждого подпространства $L'_k(t)$ найдётся момент вертикальности $t_k \in [a, b]$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $t_k \to t_0$ при $k \to +\infty$. Мы утверждаем, что $L'(t_0)$ вертикально. Предположим противное. Так как $L'(t_0)$ трансверсально подпространству $\{q = 0\}$ и условие трансверсальности открыто, то $L'_k(t)$ невертикально для всех $k > k_0$ и $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ для некоторых k_0 и $\varepsilon > 0$. Противоречие, теорема доказана.

Замечание. Теорема о нулях остаётся верной, если допускать, что у подпространства $L(t)$ $n + 1$ момент вертикальности *с учётом кратности*, где кратность момента вертикальности есть размерность пересечения подпространства $L(t)$ с $\{q = 0\}$. При этом доказательство менять не нужно.

Замечание. В доказательстве теоремы о нулях от гамильтониана требовалось лишь то, что на подпространстве $\{q = 0\}$ гамильтониан, как квадратичная форма, положительно определён.

Список литературы

[Арн67] Арнольд В.И. О характеристическом классе, входящем в условия квантования. *Функциональный анализ и его приложения* **1** (1967), в. 1, 1–14.

[Арн74] Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1974.

[Арн85] Арнольд В.И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. *Функциональный анализ и его приложения* **19** (1985), в. 4, 1–10.

[Sturm] Sturm C. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Journ. Math. Pures Appl.* **1** (1836), 106–186.

9 Относительный индекс Маслова

В этой лекции мы определим индекс Маслова $\mu(L(t), \alpha)$ пути $L(t)$ в пространстве лагранжевых подпространств относительно лагранжева подпространства α, где начальное и конечное подпространство пути трансверсально подпространству α. Если гамильтониан есть квадратичная форма, положительно определённая на α в любой момент времени, то для гамильтоновой траектории $L(t)$ индекс Маслова $\mu(L(t), \alpha)$ равен числу моментов нетрансверсальности $L(t)$ и α с учётом кратности ($= \dim(\alpha \cap \cap L(t))$). Если путь $L(t)$ замкнут, то его индекс Маслова равен индексу Маслова петли, который был определён в разделе 3.4.

9.1 Атлас лагранжева грассманиана

Пусть α — лагранжево подпространство. Обозначим за U_α множество лагранжевых подпространств, трансверсальных α. Пусть (p, q) — координаты Дарбу, в которых $\alpha = \{q = 0\}$. Если $L \in U_\alpha$, то подпространство L можно спроектировать изоморфно на подпространство $\{p = 0\}$ вдоль α. Выберем в L базис, который при проекции переходит в часть выбранного базиса Дарбу. Матрица этого базиса имеет вид $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица и $A = A^T$. Набор коэффициентов матрицы A, расположенных не ниже главной диагонали, обозначим за $\psi_{p,q}(L)$.

Упражнение. U_α открыто в топологии многообразия $\mathcal{L}(n) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{O}(n)$ и координатные функции $\psi_{p,q}$ бесконечно дифференцируемы на U_α.

Несложно выписать явно функции перехода от $\psi_{p,q}$ к $\psi_{p',q'}$ через формулы перехода от (p, q) к (p', q') и убедиться непосредственно в их гладкости. Таким образом мы получаем структуру гладкого многообразия на $\mathcal{L}(n)$, где каждая карта в атласе гомеоморфна $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

9.2 Относительный индекс Маслова: определение

Пусть $p : \widetilde{\mathcal{L}}(n) \to \mathcal{L}(n)$ — универсальное накрытие. Так как карта U_α стягиваема, её прообраз состоит из счётного числа её копий, каждая из которых гомеоморфно проецируется на U_α.

Пусть $\mu : \pi_1(\mathcal{L}(n)) \to \mathbb{Z}$ — изоморфизм Маслова, определённый в разделе 3.4. Фундаментальная группа действует на универсальной накрывающей, а значит, мы получаем точное транзитивное действие группы $\mathbb{Z} = \mu(\pi_1(\mathcal{L}(n)))$ на множестве связных компонент прообраза U_α. Присваивая одной из компонент номер 0, с помощью действия $\mathbb{Z}$ мы получаем нумерацию компонент: $p^{-1}(U_\alpha) \approx U_\alpha \times \mathbb{Z}$.

Пусть $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathcal{L}(n)$ — такой путь, что начальное и конечное подпространства трансверсальны α. Пусть $\widetilde{\gamma}$ — любое поднятие пути в универсальное накрытие. Так как концы пути γ принадлежат U_α, то концы пути $\widetilde{\gamma}$ лежат в прообразе карты U_α.

Пусть $\widetilde{\gamma}(t_i) \in U_\alpha \times \{k_i\}$, где $i = 0, 1$. Тогда индексом Маслова пути γ относительно лагранжева подпространства α называется число

$$\mu(\gamma, \alpha) = k_1 - k_0.$$

Разность $k_1 - k_0$ не зависит ни от выбора нулевой компоненты $p^{-1}(U_\alpha)$, ни от выбора поднятия пути γ. По лемме о поднятии гомотопии, индекс Маслова $\mu(\gamma, \alpha)$ не меняется, если деформировать путь в классе путей с концами в U_α.

Очевидно, что относительный индекс Маслова аддитивен при конкатенации путей.

Пример: замкнутый путь. По определению индекс Маслова замкнутого пути γ совпадает с индексом Маслова петли, определённым в разделе 3.4: $\mu(\gamma, \alpha) = \mu(\gamma)$.

9.3 Пример: траектория гамильтонова потока

Утверждение. *Пусть $H(t)$ — квадратичная форма, положительно определённая на подпространстве α при всех t, и пусть вектора лагранжева подпространства $L(t)$ суть траектории гамильтонова потока относительно H. Тогда*

$$\mu(L(t), \alpha) = \sum_i \dim(L(t_i) \cap \alpha),$$

где суммирование берётся по моментам нетрансверсальности $L(t)$ и α.

Геометрически утверждение означает, что индекс Маслова $\mu(L(t), \alpha)$ можно определять, как индекс пересечения пути $L(t)$ с циклом $\Sigma(\alpha) := \mathcal{L}(n) \setminus U_\alpha$, на котором коориентация задана сдвигом $\Sigma(\alpha) \ni L \mapsto e^{it}L$ для малого $t > 0$. Цикл $\Sigma(\alpha)$ имеет особенности, поэтому точки пересечения с путём нужно считать, учитывая кратность.

Чтобы проверить это утверждение, нужно рассмотреть поднятие в универсальную накрывающую пути $L(t)$ и проверить, что при переходе через момент нетрансверсальности t_i номер компоненты $p^{-1}(U_\alpha)$ изменяется на $\dim(L(t_i) \cap \alpha)$. Сначала мы покажем (следствие 2 из леммы ниже), что разница номеров не зависит от квадратичной формы, а потом (пример после следствия 3) мы вычислим эту разницу для конкретной квадратичной формы.

Лемма. *Пусть $H = H_s(t)$ — квадратичная форма, невырожденная на пересечении лагранжевых подпространств $L \cap \alpha$ при $t = 0$, и непрерывно зависящая от времени t и параметра s, который пробегает компактное пространство. Пусть вектора лагранжева подпространства $L_s(t)$ суть траектории гамильтонова потока относительно $H_s(t)$ и $L_s(0) = L$ при всех s. Тогда найдётся такое $\varepsilon > 0$, что при всех s и t, таких что $|t| < \varepsilon$ и $t \neq 0$, подпространство $L_s(t)$ трансверсально α.*

Доказательство. Выберем такие координаты Дарбу (p, q), что α задаётся системой уравнений $q^i = 0$, где $i = 1, \ldots, n$, а L задаётся системой уравнений $p^1 = 0, \ldots, p^k =$

$0, q^{k+1} = 0, \ldots, q^n = 0$. Подействуем на эти уравнения гамильтоновым потоком. Тогда при всех значениях параметра s, $L_s(t)$ задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} p^1 - t\dfrac{\partial H}{\partial q^1} + o(t) = 0, \\ \qquad \ldots \\ p^k - t\dfrac{\partial H}{\partial q^k} + o(t) = 0, \\ q^{k+1} + t\dfrac{\partial H}{\partial p^{k+1}} + o(t) = 0, \\ \qquad \ldots \\ q^n + t\dfrac{\partial H}{\partial p^n} + o(t) = 0, \end{cases}$$

где значение производных берётся при $t = 0$, а $o(t)$ стремится к 0 равномерно по s. Трансверсальность $L_s(t)$ и α равносильна тому, что определитель матрицы, составленной из частных производных по p, отличен от 0:

$$\begin{vmatrix} E - t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p^j}\right)_{\substack{i=1\ldots k \\ j=1\ldots k}} & -t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^i \partial p^j}\right)_{\substack{i=1\ldots k \\ j=k+1\ldots n}} \\ t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j}\right)_{\substack{i=k+1\ldots n \\ j=1\ldots k}} & t\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j}\right)_{\substack{i=k+1\ldots n \\ j=k+1\ldots n}} \end{vmatrix} + o(t^n) = t^{n-k} \det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j}\right)_{\substack{i=1\ldots k \\ j=1\ldots k}} + o(t^{n-k+1}),$$

что отлично от 0 при достаточно малом (ненулевом) t, так как $H_s(0)$ невырожденна на $L \cap \alpha$. $\square$

Следствие 1. *Для любого лагранжева подпространства α множество лагранжевых подпространств, трансверсальных α, всюду плотно в $\mathcal{L}(n)$.*

Доказательство. Пусть $L \notin U_\alpha$. Возьмём гамильтониан $H = \sum\limits_{i=1}^{n}((p^i)^2 + (q^i)^2)$. Тогда за любое малое время гамильтонов поток переводит L в подпространство, трансверсальное α. $\square$

Упражнение. Докажите следствие 1 с помощью атласа лагранжева грассманиана или с помощью топологии смежных классов.

Следствие 2. *Пусть вектора лагранжевых подпространств $L(t)$ и $L'(t)$ суть траектории гамильтоновых потоков относительно квадратичных форм $H(t)$ и $H'(t)$ соответственно, положительно определённых на лагранжевом подпространстве α. Пусть $\widetilde{L}(t)$ и $\widetilde{L}'(t)$ — поднятия путей в универсальную накрывающую и пусть $\widetilde{L}(0) =$*

$\widetilde{L}'(0)$. *Тогда найдётся такое* $\varepsilon > 0$, *что при каждом* t, *таком что* $0 < |t| < \varepsilon$, $\widetilde{L}(t)$ *и* $\widetilde{L}'(t)$ *лежат в одной компоненте связности* $p^{-1}(U_\alpha)$.

Доказательство. Возьмём $H_s = (1-s)H + sH'$, где $s \in [0,1]$. Тогда H_s невырожденна на α для всех s и t, так как H и H' положительно определены на α.

Пусть вектора лагранжева подпространства $L_s(t)$ суть гамильтоновы траектории относительно гамильтониана $H_s(t)$ и пусть $L_s(0) = L(0) = L'(0)$ По лемме найдётся ε, что для любых $s \in [0,1]$ и $t \neq 0, |t| < \varepsilon$ выполнено $L_s(t) \in U_\alpha$. Тогда $L_s(t)$ при фиксированном $t \neq 0$ и $|t| < \varepsilon$ — это путь внутри U_α, который соединяет $L(t) = L_0(t)$ и $L'(t) = L_1(t)$. Поднятие этого пути в универсальную накрывающую показывает, что $\widetilde{L}(t)$ и $\widetilde{L}'(t)$ лежат в одной компоненте связности $p^{-1}(U_\alpha)$. $\square$

Следствие 3. *Пусть вектора лагранжевых подпространств* $L(t)$ *и* $L'(t)$ *суть траектории гамильтоновых потоков относительно квадратичных форм* $H(t)$ *и* $H'(t)$ *соответственно, ограничения которых на подпространство* $L(0) \cap \alpha = L'(0) \cap \alpha$ *невырожденны и имеют одинаковую сигнатуру, где* α — *лагранжево подпространство. Пусть* $\widetilde{L}(t)$ *и* $\widetilde{L}'(t)$ — *поднятия путей в универсальную накрывающую и пусть* $\widetilde{L}(0) = \widetilde{L}'(0)$. *Тогда найдётся такое* $\varepsilon > 0$, *что при каждом* t, *таком что* $0 < |t| < \varepsilon$, $\widetilde{L}(t)$ *и* $\widetilde{L}'(t)$ *лежат в одной компоненте связности* $p^{-1}(U_\alpha)$.

Доказательство. Достаточно построить непрерывное семейство квадратичных форм $H_s(t)$, невырожденных на $L(0) \cap \alpha = L'(0) \cap \alpha$, в которое входят $H(t)$ и $H'(t)$. Дальше доказательство дословно повторяет доказательство следствия 2.

Найдутся два базиса e и e' подпространства $L(0) \cap \alpha = L'(0) \cap \alpha$, такие что форма $H(0)$ в базисе e и форма $H'(0)$ в базисе e' имеют одну и ту же диагональную матрицу, состоящую из ± 1. Можно считать, что базисы e и e' имеют одну ориентацию. Тогда найдётся непрерывное семейство базисов e_s, $s \in [-1, 0]$, такое что $e_{-1} = e$ и $e_0 = e'$. Пусть f — базис ортогонального дополнения подпространства $L(0) \cap \alpha$ относительно $H(0)$.

Пусть при $s \in [-1, 0]$ $H_s(t)$ — квадратичная форма, которая в базисе e_s, f имеет ту же матрицу, что и форма $H(t)$ в базисе e, f. Пусть при $s \in [0,1]$ $H_s(t) = (1-s)H_0(t) + sH'(t)$. Тогда $H_s(t)$ при $s \in [-1,1]$ — искомое семейство. $\square$

Пример. Петля $U(t) = \operatorname{diag}(\underbrace{e^{it}, \ldots, e^{it}}_{k}, \underbrace{e^{-it}, \ldots, e^{-it}}_{l}, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{U}(n)$, где $t \in [-\pi, \pi]$, имеет индекс Маслова $k - l$. Значит, петля $L(t) = U(t) \cdot L$, где $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ и L — любое лагранжево подпространство, тоже имеет индекс Маслова $k - l$.

С другой стороны, петля $L(t)$ задаётся гамильтонианом $H(p,q) = \frac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{k}((p^i)^2 + (q^i)^2) - \sum\limits_{i=k+1}^{k+l}((p^i)^2 + (q^i)^2))$, где $z^i = p^i + \mathrm{i}q^i$. Пусть $L(-\pi/2) = \{p = 0\}$. Тогда момент $t = 0$ — единственный момент нетрансверсальности подпространств $L(t)$ и $\{q = 0\}$

на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$, и ограничение H на $L(0) \cap \{q = 0\}$ невырожденно и имеет сигнатуру $k - l$.

Как мы посчитали, вклад момента $t = 0$ в индекс Маслова петли $L(t)$ равен $k - l$. По следствию 3, вклад этого момента нетрансверсальности будет таким же для любой петли $L'(t)$, заданной другим квадратичным гамильтонианом, ограничение которого на $L(0) \cap \{q = 0\}$ невырожденно и имеет сигнатуру $k-l$, где $L(0) = L'(0)$. Мы получаем:

Следствие 4. *Пусть вектора лагранжева подпространства $L(t)$ суть траектории гамильтонова потока относительно квадратичной формы $H(t)$, ограничение которой в момент времени $t = 0$ на подпространство $L(0) \cap \alpha$ невырожденно, где α — лагранжево подпространство. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$*

$$\mu(L(t), \alpha)_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} = \operatorname{sign} H\big|_{L(0) \cap \alpha}.$$

Доказательство. Выберем такие координаты Дарбу (p, q), чтобы $\alpha = \{q = 0\}$, $L(0) = \{q^1 = \cdots = q^m = p^{m+1} = \cdots = p^n = 0\}$, воспользуемся следствием 3 и примером выше. $\square$

9.4 Касательное пространство к $\mathcal{L}(n)$

Теорема. *Пусть $L \in \mathcal{L}(n)$. Тогда отображение $H \mapsto L(t)$, которое сопоставляет любой квадратичной форме на всём пространстве касательный вектор $L(t)$ в точке L, где $L(0) = L$ и $L(t)$ состоит из траекторий гамильтонова потока относительно H, линейно, сюръективно, а его ядро состоит из форм, ограничение которых на L нулевое.*

Доказательство. Линейность очевидна из определения гамильтонова потока. Сюрьективность следует из того, что любой касательный вектор $L(t)$ можно задать с помощью семейства симплектических операторов $\Phi(t)$, где $L(t) = \Phi(t) \cdot L$ (например, поднимая путь $L(t)$ в пространство расслоения $\mathrm{U}(n)$), и того, что поток $\Phi(t)$ гамильтонов с гамильтонианом $H(u, t) = (\Omega \dot{\Phi} \Phi^{-1} u, u)/2$, где Ω — матрица симплектической формы, Φ — матрица оператора в базисе Дарбу, а $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение (это упражнение).

Проверим, что если ограничение квадратичной формы H на подпространство L нулевое, то соответствующий касательный вектор нулевой. Пусть $v(t)$ — гамильтонова траектория и $v \in L$. Тогда по определению гамильтонова потока,

$$\omega(w, \dot{v}) = 2H(w, v)$$

для любого вектора w, где $H(w,v)$ — симметричная билинейная форма, ассоциированная с квадратичной. Отсюда следует, что $\dot{v}$ косоортогонален L, а значит, $\dot{v} \in L$. Значит, $L(t) \equiv L$.

Других квадратичных форм в ядре построенного отображения нет. Это следует из равенства размерностей $\mathcal{L}(n)$ и пространства квадратичных форм на L. $\square$

Как видно из доказательства теоремы, по касательному вектору $L(t)$ квадратичная форма на L, обозначим её за $\dot{L}$, строится по правилу

$$\dot{L}(v) = \frac{1}{2}\omega(v, \dot{v}).$$

9.5 Определение индекса Маслова по Робину-Саламону

Пусть $\alpha \in \mathcal{L}(n)$ и $L(t)$, где $t \in [t_0, t_1]$ — путь в $\mathcal{L}(n)$, причём в моменты нетрансверсальности подпространств $L(t)$ и α форма $\dot{L}$ невырожденна на $L(t) \cap \alpha$. Определим индекс Маслова

$$\mu(L(t), \alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} \dot{L}(t_0)\big|_{L(t_0)\cap\alpha} + \sum_{t \in (t_0, t_1)} \operatorname{sign} \dot{L}(t)\big|_{L(t)\cap\alpha} + \frac{1}{2} \operatorname{sign} \dot{L}(t_1)\big|_{L(t_1)\cap\alpha},$$

где суммирование происходит по внутренним моментам нетрансверсальности.

Если $L(t_0)$ и $L(t_1)$ трансверсальны подпространству α, то по следствию 4 новое определение индекса Маслова совпадает с исходным.

В новом определении индекс Маслова по-прежнему аддитивен относительно конкатенации путей (при условии, что получающийся путь — гладкий), концы которых, однако, теперь могут не принадлежать U_α.

Упражнение. Рассмотрим гамильтонову систему в $\mathbb{R}^4$ с гамильтонианом $H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + 17q_1^2 + 16q_1q_2 + 17q_2^2)$. Пусть $L: p_1 = 0, p_2 = 0$ лагранжева плоскость, а $L(t)$ — траектория этой плоскости в силу гамильтоновой системы. Докажите, что $L(\pi) = L$ и найдите число моментов вертикальности и индекс Маслова петли $L(t)$ за время от 0 до π.

10 Индекс тройки лагранжевых подпространств

В этой лекции мы дадим ещё одно определение индекса Маслова. На этот раз с помощью индекса тройки. Также мы вернёмся к обобщению задачи Штурма.

Любую пару лагранжевых подпространств можно перевести симплектоморфизмом в другую пару, если размерности пересечений подпространств в парах совпадают. Для троек это не так. Для тройки мы определим инвариант относительно симплектоморфизмов.

10.1 Определение индекса тройки по Гёрмандеру-Кашиваре

Пусть L_1, L_2, L_3 — лагранжевы подпространства и ω — симплектическая форма. На пространстве $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ определим квадратичную форму Q_{L_1,L_2,L_3}, которая на векторе $v_1 \oplus v_2 \oplus v_3$ равна $\omega(v_1, v_2) + \omega(v_2, v_3) + \omega(v_3, v_1)$. Половину разности количеств плюсов и минусов в нормальном виде этой формы назовём индексом тройки L_1, L_2, L_3:

$$\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) := \frac{1}{2} \operatorname{sign} Q_{L_1,L_2,L_3}.$$

Пример 1. Пусть (p, q) — такие координаты Дарбу, что $L_1 = \{q = 0\}$, $L_2 = \{p = 0\}$, а L_3 трансверсально L_1. Тогда в L_3 можем выбрать базис с матрицей $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, где $A^T = A$. Тогда

$$\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = -\frac{1}{2} \operatorname{sign}(A).$$

Проверим это. Вычислим билинейную форму Q_{L_1,L_2,L_3}:

$$\begin{aligned} &Q_{L_1,L_2,L_3}(u_1 \oplus u_2 \oplus u_3, v_1 \oplus v_2 \oplus v_3) = \\ &\qquad = \frac{1}{2}(\omega(u_1, v_2) + \omega(u_2, v_3) + \omega(u_3, v_1) + \omega(v_1, u_2) + \omega(v_2, u_3) + \omega(v_3, u_1)), \end{aligned}$$

Заметим, что

$$Q_{L_1,L_2,L_3}(u_1 \oplus u_2 \oplus 0, v_1 \oplus v_2 \oplus (v_1 + v_2)) = \frac{1}{2}(\omega(u_1, v_2) + \omega(u_2, v_1 + v_2) + \omega(v_1, u_2) + \omega(v_1 + v_2, u_1)) = 0.$$

Это даёт разложение $L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$ в прямую сумму ортогональных подпространств $L_1 \oplus L_2 \oplus 0$ и подпространства $X \subset L_1 \oplus L_2 \oplus L_3$, состоящего из троек $v_1 \oplus v_2 \oplus (v_1 + v_2)$.

На подпространстве $L_1 \oplus L_2 \oplus 0$ мы имеем $Q_{L_1,L_2,L_3} = \sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i$, а значит, её индекс равен 0.

Подпространство X однозначно проецируется на L_3, а форма Q_{L_1,L_2,L_3} при этом отождествляется с формой $-\sum\limits_{i=1}^{n} p^i q^i\big|_{L_3}$: $Q_{L_1,L_2,L_3}(v_1 \oplus v_2 \oplus (v_1+v_2)) = -\omega(v_1, v_2)$. Матрица этой формы равна

$$-\begin{pmatrix} A^T & E \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} A^T & E \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E \\ A \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(A^T + A) = -A.$$

Пример 2. Пусть L_1, L_2, L_3 — три прямые на плоскости. Если при вращении против часовой стрелки прямой L_1 мы первой получим прямую L_2, а потом L_3, то $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = 1/2$. Если L_2 и L_3 встретятся в другом порядке, то $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = -1/2$. Если какие-то две прямые совпадают, то $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = 0$.

Пример 3. Пусть симплектическое пространство представлено в виде прямой суммы попарно косоортогональных симплектических двумерных подпространств V_i и каждое из трёх лагранжевых подпространств L_1, L_2, L_3 пересекает каждое подпространство V_i по прямой. Тогда индекс $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3)$ равен сумме индексов троек прямых в подпространствах V_i.

Упражнение. Докажите, что для любой тройки лагранжевых подпространств найдётся разложение всего пространства, как в примере 3.

Упражнение. Докажите, что $|\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3)| \le \dim L_1/2$.

Упражнение. Докажите, что одну тройку лагранжевых подпространств L_1, L_2, L_3 можно перевести симплектоморфизмом в другую тройку L_1', L_2', L_3', если и только если $\dim L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \dim L_1' \cap L_2' \cap L_3'$, $\dim L_i \cap L_j = \dim L_i' \cap L_j'$, для всех $i, j = 1, 2, 3$ и $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = \operatorname{ind}(L_1', L_2', L_3')$.

Пример 4. Пусть (p, q) — такие координаты Дарбу, что L_1, L_2, L_3 трансверсальны подпространству $\{q = 0\}$. Тогда в L_i можем выбрать базис с матрицей $\begin{pmatrix} A_i \\ E \end{pmatrix}$, где $A_i^T = A_i$. Тогда

$$\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = \frac{1}{2}(\operatorname{sign}(A_1 - A_2) + \operatorname{sign}(A_2 - A_3) + \operatorname{sign}(A_3 - A_1)).$$

Действительно, обозначим базис, выбранный в L_i, за $e_{i,j}$, где $j = 1, \ldots, n$. Матрица формы Q_{L_1,L_2,L_3} в базисе $\{e_{i,j}\}$, где элементы упорядочены сначала по i, а потом по j, равна

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 - A_2 & A_3 - A_1 \\ A_1 - A_2 & 0 & A_2 - A_3 \\ A_3 - A_1 & A_2 - A_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где каждый блок — это матрица $(\omega(e_{i,j}, e_{i',j'}))_{j,j'}$ для некоторых фиксированных i и i':

$$(\omega(e_{i,j}, e_{i',j'}))_{j,j'} = \begin{pmatrix} A_i \\ E \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i'} \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i \\ E \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E \\ -A_{i'} \end{pmatrix} = A_i - A_{i'}.$$

Теперь перейдём к новому базису, заменив каждый вектор старого базиса $e_{i,j}$ на сумму $e_{i',j} + e_{i'',j}$, где i, i', i'' попарно различны. Матрица перехода к новому базису равна

$$\begin{pmatrix} 0 & E & E \\ E & 0 & E \\ E & E & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица квадратичной формы в новом базисе равна

$$\begin{pmatrix} 0 & E & E \\ E & 0 & E \\ E & E & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & A_1 - A_2 & A_3 - A_1 \\ A_1 - A_2 & 0 & A_2 - A_3 \\ A_3 - A_1 & A_2 - A_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E & E \\ E & 0 & E \\ E & E & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} A_2 - A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 - A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 - A_2 \end{pmatrix},$$

что всё доказывает.

10.2 Свойства индекса тройки

Из определения сразу следует

Свойство 1. $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = -\operatorname{ind}(L_2, L_1, L_3)$, $\operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = \operatorname{ind}(L_2, L_3, L_1)$.

Для любой четвёрки лагранжевых подпространств L_1, L_2, L_3, L_4 найдётся лагранжево подпространство α, трансверсальное им всем. Действительно, множество U_{L_i} лагранжевых подпространств, трансверсальных L_i, открыто и всюду плотно, а значит, пересечение таких множеств непусто.

Выберем такие координаты Дарбу (p, q), чтобы $\alpha = \{q = 0\}$. Тогда для каждой тройки из четырёх взятых подпространств мы получаем ситуацию, как в примере 4, откуда следует

Свойство 2.

$$\operatorname{ind}(L_2, L_3, L_4) - \operatorname{ind}(L_1, L_3, L_4) + \operatorname{ind}(L_1, L_2, L_4) - \operatorname{ind}(L_1, L_2, L_3) = 0.$$

Заметим, что в примере 4 подпространства L_i и L_j трансверсальны, если и только если $\det(A_i - A_j) \neq 0$. Отсюда следует

Свойство 3. *Пусть лагранжево подпространство $L_3(t)$ непрерывно зависит от времени и остаётся трансверсальным подпространствам L_1 и L_2. Тогда индекс $\mathrm{ind}(L_1, L_2, L_3(t))$ не зависит от времени.*

Доказательство. Достаточно доказать, что индекс локально постоянен. Выберем координаты Дарбу, так чтобы подпространство $\{q = 0\}$ было трансверсально $L_1, L_2, L_3(t_0)$ в какой-то момент времени t_0. Так как множество подпространств, трансверсальных подпространству $\{q = 0\}$, открыто, то $L(t)$ трансверсально подпространству $\{q = 0\}$ для моментов времени некоторой окрестности момента t_0. Выбирая базисы подпространств, как в примере 4, получаем

$$\mathrm{ind}(L_1, L_2, L_3(t)) = \frac{1}{2}(\mathrm{sign}(A_1 - A_2) + \mathrm{sign}(A_2 - A_3(t)) + \mathrm{sign}(A_3(t) - A_1)),$$

что не зависит от t, так как матрицы $A_2 - A_3(t)$ и $A_3(t) - A_1$ остаются невырожденными. $\square$

10.3 Определение индекса Маслова с помощью индекса тройки

Теорема. *Пусть $L(t)$ — путь в $\mathcal{L}(n)$, временной отрезок которого разбит на интервалы $[t_i, t_{i+1}]$, где $i = 0, \ldots, N$, так что на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ подпространства $L(t)$ и β_i трансверсальны. Пусть α — лагранжево подпространство и α трансверсально подпространствам $L(t_0)$ и $L(t_{N+1})$. Тогда*

$$\mu(L(t), \alpha) = \sum_{i=0}^{N} (\mathrm{ind}(L(t_i), \alpha, \beta_i) - \mathrm{ind}(L(t_{i+1}), \alpha, \beta_i)).$$

Замечание. Если не требовать трансверсальности конечных подпространств пути подпространству α, то мы получаем расширение понятия индекса Маслова на все пути, потому что для любого пути $L(t)$, разбиение, как в теореме, найдётся. Такое определение будет также согласовано с определением по Робину-Саламону из раздела **??**.

Доказательство.
Шаг 1. Сначала сведём к случаю, когда каждое подпространство $L(t_i)$ при $i = 0, \ldots, N+1$ трансверсально α.

Для этого удлиним путь, вставив после каждого момента t_i для $i = 1, \dots, N$ конкатенацию взаимно обратных путей $e^{\mathrm{i}s}L(t_i), s \in [0, \varepsilon]$ и $e^{-\mathrm{i}r}L(t_i), r \in [-\varepsilon, 0]$, заменив момент t_i на момент перехода на обратный путь. Число ε можно выбрать достаточно маленьким, чтобы все пространства добавленных путей были трансверсальны β_i для соответствующего i и чтобы $L(t_i)$ теперь было трансверсально α.

Такая замена не меняет левой части доказываемого равенства, потому что мы заменили путь на гомотопный, не меняя концов. Правая часть изменилась на

$$\sum_{i=1}^{N} \big(\mathrm{ind}(L(t_i), \alpha, \beta_{i-1}) - \mathrm{ind}(e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \alpha, \beta_{i-1})\big) - \big(\mathrm{ind}(L(t_i), \alpha, \beta_i) - \mathrm{ind}(e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \alpha, \beta_i)\big) =$$

Воспользуемся свойством 2 индекса тройки и получим:

$$= \sum_{i=1}^{N} \big(\mathrm{ind}(L(t_i), e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \beta_{i-1}) - \mathrm{ind}(L(t_i), e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \alpha)\big) -$$
$$- \big(\mathrm{ind}(L(t_i), e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \beta_i) - \mathrm{ind}(L(t_i), e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \alpha)\big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \big(\mathrm{ind}(L(t_i), e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \beta_{i-1}) - \mathrm{ind}(L(t_i), e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \beta_i)\big) =$$

Ещё раз применим свойство 2, а потом воспользуемся свойством 3:

$$= \sum_{i=1}^{N} \big(\mathrm{ind}(L(t_i), \beta_i, \beta_{i-1}) - \mathrm{ind}(e^{\mathrm{i}\varepsilon}L(t_i), \beta_i, \beta_{i-1})\big) = 0.$$

Шаг 2. Теперь сведём к случаю, когда β_i трансверсально α.

Подразбивая временной отрезок, можно добиться того, чтобы $L(t)$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$ было трансверсально любому подпространству $\beta_i(s) = e^{\mathrm{i}s}\beta_i$, достаточно близкому к подпространству β_i.

Так как индекс Маслова аддитивен при конкатенации путей, то можно считать, что $N = 1$. Обозначим β_0 за β и $\beta_0(s)$ за $\beta(s)$.

По свойству 2 индекса тройки

$$\mathrm{ind}(L(t_0), \alpha, \beta) - \mathrm{ind}(L(t_1), \alpha, \beta) = \mathrm{ind}(L(t_0), L(t_1), \beta) - \mathrm{ind}(L(t_0), L(t_1), \alpha).$$

По свойству 3 $\mathrm{ind}(L(t_0), L(t_1), \beta) = \mathrm{ind}(L(t_0), L(t_1), \beta(s))$. Так как для любого достаточно малого s подпространство $\beta(s)$ трансверсально α, и замена β на $\beta(s)$ не меняет правой части доказываемого равенства (и левой тоже), то мы можем считать, что изначально β было трансверсально α.

Шаг 3. Выберем координаты Дарбу (p, q), как в примере 1, то есть $\beta = \{q = 0\}$, $\alpha = \{p = 0\}$, а в подпространстве $L(t)$ выберем базис $\begin{pmatrix} A(t) \\ E \end{pmatrix}$, где $A = A^T$. Тогда правая часть доказываемого равенства равна $\frac{1}{2}(\mathrm{sign}\, A(t_0) - \mathrm{sign}\, A(t_1))$.

Подпространства $L(t_i)$ и α трансверсальны, поэтому $\det A(t_i) \neq 0$.

Непрерывно перемещая концы пути $L(t)$, сохраняя условие $\det A(t_i) \neq 0$, можно добиться того, чтобы $A(t_0)$ и $A(t_1)$ были диагональными матрицами, у которых по диагонали сначала идут -1, а потом $+1$. Это возможно благодаря тому, что пространство невырожденных квадратичных форм фиксированного индекса связно. Перемещение концов пути не меняет $\mu(L(t), \alpha)$, потому что концы остаются трансверсальными α, а разность $\operatorname{sign} A(t_0) - \operatorname{sign} A(t_1)$ сохраняется, потому что $A(t_i)$ остаются невырожденными. Возможно обращая ориентацию пути, можно считать, что $\operatorname{ind} A(t_1) > \operatorname{ind} A(t_0)$.

Зафиксировав концы пути $L(t)$ прогомотопируем его в путь, у которого $A(t)$ линейно зависит от t. Индекс Маслова $\mu(L(t), \alpha)$ при этом не поменяется, а разность $\operatorname{sign} A(t_0) - \operatorname{sign} A(t_1)$ тем более. Поэтому можно считать, что все матрицы $A(t)$ диагональные, а от t зависит лишь несколько диагональных элементов $a_{ii}(t)$, где $\operatorname{ind} A(t_0) + 1 \leq i \leq \operatorname{ind} A(t_1)$ и $a_{ii}(t)$ линейно меняется от $+1$ к -1.

Такой путь есть траектория гамильтонова потока относительно

$$H = \frac{1}{2(t_1 - t_0)} \sum_{i=\operatorname{ind} A(t_0)+1}^{\operatorname{ind} A(t_1)} (q^i)^2.$$

В единственный момент $t = (t_0 + t_1)/2$ нетрансверсальности $L(t)$ и α сигнатура формы H на подпространстве $L((t_0 + t_1)/2) \cap \alpha$ равна $\operatorname{ind} A(t_1) - \operatorname{ind} A(t_0)$.

Значит, по следствию 4 предыдущей лекции $\mu(L(t), \alpha) = \frac{1}{2}(\operatorname{sign} A(t_0) - \operatorname{sign} A(t_1))$.
$\square$

10.4 Зависимость индекса Маслова от неподвижного подпространства

Теорема. *Пусть конечные подпространства пути $L(t) \in \mathcal{L}(n)$ трансверсальны лагранжевым подпространствам α и β. Тогда*

$$\mu(L(t), \beta) - \mu(L(t), \alpha) = \operatorname{ind}(\alpha, \beta, L(t_1)) - \operatorname{ind}(\alpha, \beta, L(t_0)).$$

Доказательство. Пусть $L(t)$, где $t \in [t_1, t_2]$, — путь, соединяющий $L(t_1)$ с $L(t_2) =$

$L(t_0)$ и целиком состоящий из подпространств, трансверсальных β. Такой путь найдётся, так как U_β связно, как было показано в прошлой лекции.

Обе части доказываемого равенства равны нулю для пути $L(t)_{t \in [t_0, t_2]}$, так как он замкнут. Также обе части равенства аддитивны при конкатенации путей. Значит, достаточно доказать равенство для пути $L(t)$, где $t \in [t_1, t_2]$. Сделав переобозначения, можно считать, что исходный путь целиком лежит в U_β. Так как путь целиком лежит в U_β, то $\mu(L(t), \beta) = 0$ и мы всё доказали по теореме из прошлого пункта. $\square$

10.5 Теорема перемежаемости

Теорема перемежаемости. *Пусть гамильтониан есть квадратичная форма, положительно определённая на лагранжевых подпространствах α и β в любой момент времени, и пусть вектора лагранжева подпространства $L(t)$ суть траектории гамильтонова потока. Тогда число моментов нетрансверсальности (с учётом кратности) α и $L(t)$ отличается от числа моментов нетрансверсальности β и $L(t)$ не более, чем на n — половину размерности векторного пространства.*

Доказательство. Если α и β трансверсальны, то теорема доказывается точно так же, как теорема о нулях с помощью лемм 1 и 2 из раздела 8.2.

В общем случае количество моментов нетрансверсальности (с учётом кратности) $L(t)$ и α — это индекс Маслова $\mu(L(t), \alpha)$ по следствию 4 из прошлой лекции. Тем самым утверждение сводится к неравенству $\mu(L(t), \beta) - \mu(L(t), \alpha) \leq n$.

По теореме из прошлого пункта

$$\mu(L(t), \beta) - \mu(L(t), \alpha) = \operatorname{ind}(\alpha, \beta, L(t_1)) - \operatorname{ind}(\alpha, \beta, L(t_0)).$$

По свойству 2 индекса тройки

$$\operatorname{ind}(\alpha, \beta, L(t_1)) - \operatorname{ind}(\alpha, \beta, L(t_0)) = \operatorname{ind}(L(t_0), L(t_1), \alpha) - \operatorname{ind}(L(t_0), L(t_1), \beta).$$

Индексы $\operatorname{ind}(L(t_0), L(t_1), \alpha)$ и $\operatorname{ind}(L(t_0), L(t_1), \beta)$ могут быть вычислены, как в примере 1, так как α и β трансверсальны остальным подпространствам. В частности, их модули не превосходят $n/2$, что всё доказывает.

$\square$

10.6 Упражнения

1. Пусть $L(t)$, $t \in [t_0, t_3]$ — замкнутый путь в $\mathcal{L}(n)$, $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$, подпространства $L(t_0), L(t_1), L(t_2)$ попарно трансверсальны. Тогда

$$-\frac{1}{2}(\mu(L(t)_{t\in[t_0,t_1]}, L(t_2)) + \mu(L(t)_{t\in[t_1,t_2]}, L(t_0)) + \mu(L(t)_{t\in[t_2,t_3]}, L(t_1)) - \mu(L(t)_{t\in[t_0,t_3]})) =$$
$$= \operatorname{ind}(L(t_0), L(t_1), L(t_2)).$$

2. Для пары лагранжевых подпространств L_1, L_2 обозначим за $\delta(L_1, L_2)$ величину $\sum\limits_{j=1}^{n}(1/2 - r_j)$, где $r_j \in [0, 1)$, $e^{\pi r_j \mathrm{i}}$ — собственные числа унитарного оператора U и $UL_1 = L_2$. Докажите, что $\delta(L_1, L_2)$ определено корректно.

3. Пусть три лагранжевых подпространства L_1, L_2, L_3 попарно трансверсальны. Тогда в обозначениях предыдущего упражнения

$$\mathrm{ind}(L_1, L_2, L_3) = \delta(L_1, L_2) + \delta(L_2, L_3) + \delta(L_3, L_1).$$

4. Пусть $P : L_1 \to L_2$ и $Q : L_2 \to L_1$ — ортогональные проекции лагранжевых подпространств эрмитова пространства. Докажите, что для каждого собственного вектора оператора PQ найдётся комплексно пропорциональный ему собственный вектор оператора QP.

5. Докажите, что любая унитарная матрица раскладывается в произведение ортогональной, диагональной и ортогональной матриц.

11 Топология шлейфа

12 Симплектические многообразия

12.1 Определение

Симплектическим многообразием называется пара (P, ω), где P — гладкое многообразие, $\omega \in \Omega^2(M)$ — невырожденная в каждой точке замкнутая 2-форма.

Так как $\omega^{\wedge \dim P/2}$ — форма объёма, то если P замкнуто, то $[\omega]$ представляет ненулевой класс когомологий де Рама $H^2_{DR}(P)$.

12.2 Гамильтоново векторное поле

Векторное поле X_H на симплектическом многообразии P называется гамильтоновым относительно гладкой функции H, если для любого касательного вектора v

$$\omega(v, X_H) = dH(v).$$

Утверждение 1. *В локальных координатах u^i*

$$X_H^j = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial u^i}.$$

Доказательство. По определению для любого вектора v

$$\omega_{ij}v^i X_H^j = dH_i v^i,$$

то есть $\omega_{ij}X_H^j = dH_i$. Свернём обе части с тензором ω^{-1} и получим

$$\omega^{ik}\omega_{ij}X_H^j = \omega^{ik}dH_i.$$

Так как $\omega^{ik}\omega_{ij} = \delta_j^k$, то

$$X_H^k = \omega^{ik}dH_i.$$

□

12.3 Скобка Пуассона

Скобкой Пуассона функций H и I называется функция

$$\{H, I\} = \omega(X_H, X_I).$$

Утверждение 2. *В локальных координатах u^i*

$$\{H, I\} = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial u^i}\frac{\partial I}{\partial u^j}.$$

Доказательство.

$$\{H, I\} = \omega_{ij} X_H^i X_I^j = \omega_{ij} \left(\omega^{ki} dH_k\right) \left(\omega^{lj} dI_l\right) = \omega^{ki} dH_k dI_i.$$

□

Утверждение 3. $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$.

Доказательство. В локальных координатах

$$\{F, \{G, H\}\} = \omega^{ij} \frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\omega^{kl} \frac{\partial G}{\partial u^k} \frac{\partial H}{\partial u^l}\right) =$$
$$= \omega^{ij} \frac{\partial \omega^{kl}}{\partial u^j} \frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial G}{\partial u^k} \frac{\partial H}{\partial u^l} + \omega^{ij} \omega^{kl} \left(\frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial^2 G}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial H}{\partial u^l} + \frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial G}{\partial u^k} \frac{\partial^2 H}{\partial u^j \partial u^l}\right).$$

В искомой сумме коэффициент при $\frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial^2 G}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial H}{\partial u^l}$ равен

$$\omega^{ij} \omega^{kl} + \omega^{lj} \omega^{ik}.$$

Складывая коэффициенты при $\frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial^2 G}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial H}{\partial u^l}$ и $\frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial^2 G}{\partial u^k \partial u^j} \frac{\partial H}{\partial u^l}$ и пользуясь кососимметричностью ω^{-1}, получаем 0. Значит, вторых производных в сумме нет.

Так как $\frac{\partial \omega^{kl}}{\partial u^j} = -\omega^{pl} \omega^{km} \frac{\partial \omega_{pm}}{\partial u^j}$, то коэффициент при $\frac{\partial F}{\partial u^i} \frac{\partial G}{\partial u^k} \frac{\partial H}{\partial u^l}$ в искомой сумме равен (с обратным знаком)

$$(\omega^{ij} \omega^{pl} \omega^{km} + \omega^{kj} \omega^{pi} \omega^{lm} + \omega^{lj} \omega^{pk} \omega^{im}) \frac{\partial \omega^{pm}}{\partial u^j}.$$

Сворачивая этот тензор с тензором $\omega_{is} \omega_{kt} \omega_{lr}$, получаем (с обратным знаком)

$$\frac{\partial \omega_{rt}}{\partial u^s} + \frac{\partial \omega_{sr}}{\partial u^t} + \frac{\partial \omega_{ts}}{\partial u^r},$$

что равно нулю, так как $d\omega = 0$. Обратно поднимая индексы, получаем, что искомый коэффициент в сумме равен 0.

□

Тем самым скобка Пуассона определяет структуру алгебры Ли на пространстве гладких функций на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона может быть определена аксиоматически:

1. $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha \{F, H\} + \beta \{G, H\}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
2. $\{F, G\} = -\{G, F\}$,
3. $\{FG, H\} = G\{F, H\} + F\{G, H\}$,

4. $\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0$.

Первые три условия означают, что скобка Пуассона определяет тензор, а последнее условие (тождество Якоби) означает, что скобка определяет алгебру Ли. Так определяемые скобки Пуассона могут быть вырожденными и даже нулевыми. В частности, нечётномерное многообразие может обладать скобкой Пуассона.

Утверждение 4.

$$X_{\{F,G\}} = [X_F, X_G].$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\{F,G\} = \omega(X_F, X_G) = dG(X_F) = X_F G$ и применим векторные поля в обеих частях равенства к какой-нибудь функции H:

$$X_{\{F,G\}}H = \{\{F,G\},H\},$$
$$[X_F, X_G]H = X_F(X_G H) - X_G(X_F H) = \{F,\{G,H\}\} - \{G,\{F,H\}\}.$$

Тем самым требуемое равенство следует из кососимметричности и тождества Якоби.

□

Мы получаем гомоморфизм $H \mapsto X_H$ алгебр Ли, образ которого — гамильтоновы векторные поля, а ядро — константы.

Упражнение. Докажите, что гамильтоновы векторные поля сохраняют скобку Пуассона:

$$X_H\{F,G\} = \{X_H F, G\} + \{F, X_H G\}.$$

12.4 Теорема Дарбу

Теорема. *В окрестности любой точки симплектического многообразия (P,ω) найдутся $2n$ таких функций $x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n$, что*

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} dx^k \wedge dy^k.$$

Доказательство. Идея доказательства заключается в индуктивном построении таких функций, что $\{x^i,x^j\} = \{y^i,y^j\} = 0$ и $\{x^i,y^j\} = \delta^{ij}$. Подробности смотрите в книге

Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1974.

□

12.5 Пример: $\mathbb{C}^{n+1}$

Пусть $h(z_1, z_2) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \overline{dz_1^k} dz_2^k$ — стандартная эрмитова форма. Тогда $\omega = \operatorname{Im} h$ — симплектическая структура, причём $\omega = \sum\limits_{k=1}^{n+1} dx^k \wedge dy^k$, где $z^k = x^k + \mathrm{i}y^k$.

12.6 Пример: $\mathbb{CP}^n$

Рассмотрим форму ω из предыдущего примера, а также естественное отображение $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Пусть также $g = \operatorname{Re} h$.

Касательное пространство к сфере разложим в прямую сумму

$$T_z S^{2n+1} = V_z \oplus < \mathrm{i}z >, \text{ где } V_z =< \mathrm{i}z >^{\perp_g},$$

Проекция π — есть фактор-отображение многообразия S^{2n+1} по действию окружности умножением на $e^{\alpha \mathrm{i}}$. Касательный вектор к орбитам действия в точке z есть вектор $\mathrm{i}z$. Поэтому при проекции $D\pi$ пространство V_z изоморфно проецируется на $T_{\pi(z)}\mathbb{C}P^n$.

Умножение на $e^{\alpha \mathrm{i}}$ сохраняет эрмитову форму, а значит, и её вещественную и мнимую части — скалярное произведение и форму ω. Поэтому при действии окружности пространства V_z переходят друг в друга, и отображение $D(\times e^{\alpha \mathrm{i}}) : V_z \to V_{e^{\alpha \mathrm{i}} z}$ есть симплектоморфизм. Это позволяет определить 2-форму ω_n на $\mathbb{C}P^n$.

Докажем, что ω_n невырожденна. Так как V_z ортогонально $< z, \mathrm{i}z >$ относительно g и $< z, \mathrm{i}z >$ инвариантно относительно умножения на i, то V_z ортогонально $< z, \mathrm{i}z >$ относительно h, а значит, и относительно ω. Значит, $\omega\big|_{V_z}$ — невырожденно, так как ω невырожденна.

Докажем, что $d\omega_n = 0$. Как мы видели выше, $\ker \omega\big|_{TS_z^{2n+1}} =< \mathrm{i}z >$. Поэтому $\pi^*\omega_n = \omega\big|_{TS^{2n+1}}$. Так как $\pi^* d\omega_n = d(\pi^*\omega_n) = d\omega = 0$ и $D\pi$ — сюрьекция, то $d\omega_n = 0$.

Упражнение. Выпишите выражение полученной симплектической структуры на $\mathbb{C}P^n$ в стандартных координатах одной из карт.

Любое гладкое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}P^n$ также является симплектическим, как показывает следующее упражнение из линейной алгебры

Упражнение. Инвариантное подпространство $\mathbb{C}^n$ относительно оператора комплексной структуры симплектично.

Задачи к экзамену

1. Пусть U — унитарный оператор с определителем 1 и L — лагранжево подпространство в $\mathbb{C}^2$ со стандартными эрмитовой и симплектической формами. Докажите, что $UL \cap L = L$ или $UL \cap L = 0$.

2. Задайте лагранжев грассманиан $\mathcal{L}(2)$ уравнениями на координаты Плюккера.

3. Пусть ω — симплектическая форма и X — линейный оператор на том же вещественном пространстве. Пусть $\omega(Xv, w) = \omega(v, -Xw)$ для любых векторов v, w. Докажите, минимальный многочлен оператора X чётный.

4. Докажите, что для любого конечного набора лагранжевых подпространств L_1, $\ldots$, L_k всегда можно выбрать лагранжево подпространство L_0 трансверсальное всем этим подпространствам.

***

5. а) Пусть $\mathfrak{u}(n)$ — алгебра Ли группы $\mathrm{U}(n)$, т.е. пространство косоэрмитовых матриц размера $n \times n$. Докажите, что $\mathrm{U}(n) = \exp(\mathfrak{u}(n))$.

   Здесь $\exp\colon \mathfrak{u}(n) \to \mathrm{U}(n)$ — экспоненциальное отображение.

   б) Пусть $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ — алгебра Ли группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, т.е. множество операторов A удовлетворяющих условию $\omega(Ax, y) + \omega(x, Ay) = 0$, где ω — симплектическая форма. Докажите, что $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \neq \exp(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}))$, но $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \exp(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})) \cdot \exp(\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}))$.

   Здесь $\exp\colon \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ — экспоненциальное отображение.

6. Пусть $\Phi(t)$ — симплектическая матрица для любого t, $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что $\Phi(t)$ — гамильтонов поток относительно гамильтониана $H(u, t) = (\Omega \dot{\Phi} \Phi^{-1} u, u)/2$, где $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение.

***

7. а) Пусть симплектоморфизм кольца $S^1 \times [0, 1]$ переводит любую окружность $S^1 \times \{s\}$ в себя. Докажите, что если точка $p \in S^1 \times \{s_0\}$ периодическая, то все точки на той же окружности $S^1 \times \{s_0\}$ периодические.

   б) Рассмотрим бильярдное отображение внутри эллипса $(x_0, \ell_0) \mapsto (x_1, \ell_1)$, где $x_i \in \ell_i$. Определим функцию $H(x, \ell)$, равную квадрату расстояния от центра эллипса до проекции фокуса на прямую ℓ. Докажите, что функция H постоянна на орбитах бильярдного отображения эллипса.

8. Если симплектический поток Φ^t на торе T^{2n} сохраняет центр масс для любого t, то он гамильтонов.

9. Найти симплектоморфизм областей плоскости, который переводит горизонтальные прямые в линии уровня функции $y(x^2+1)$.

***

10. Рассмотрим гамильтонову систему в $\mathbb{R}^4$ с гамильтонианом $H(p,q) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + 17q_1^2 + 16q_1q_2 + 17q_2^2)$. Пусть $L : p_1 = 0, p_2 = 0$ лагранжева плоскость, а $L(t)$ — траектория этой плоскости в силу гамильтоновой системы. Докажите, что $L(\pi) = L$ и найдите число моментов вертикальности и индекс Маслова петли $L(t)$ за время от 0 до π.

11. Пусть L — лагранжево подпространство. Докажите, что множество $\mathrm{Sp}_L(2n,\mathbb{R})$ симплектических операторов T таких, что $T(L)\cap L = \{0\}$ образует открытое всюду плотное множество в группе $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$. Определите гомотопический тип $\mathrm{Sp}_L(2n,\mathbb{R})$

12. Пусть $\Psi(t)$ — петля в $\mathrm{Sp}(V,\omega)$ с индексом Маслова n. Докажите, что соответствующая петля $\Gamma_\Psi(t)$ в $\Lambda(V\times V, -\omega\times\omega)$ состоящая из лагранжевых графиков отображений $\Psi(t)$ имеет индекс Маслова равный $2n$.

13 Примеры симплектических многообразий и трюк Мозера

13.1 Пример: кокасательное расслоение

Пусть L — n-мерное многообразие. Множество ковекторов T^*L на касательных пространствах к L естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия. А именно, пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас многообразия L, q^k — координаты в карте U_α. Тогда ковектор ξ определяется набором $(\xi_1, \ldots, \xi_n, q^1, \ldots, q^n)$, где $(q^1, \ldots, q^n)$ — координаты точки, к которой приложен ковектор, а $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — его координаты в стандартном базисе $dq^1, \ldots, dq^n$. В других координатах $q'^1, \ldots, q'^n$ тому же ковектору сопоставлен набор

$$(\frac{\partial q^i}{\partial q'^1}\xi_i, \ldots, \frac{\partial q^i}{\partial q'^n}\xi_i, q'^1, \ldots, q'^n).$$

Мы получаем атлас $\{\big(\mathbb{R}^n \times U_\alpha, ((D\varphi_\alpha)^T)^{-1} \times \varphi_\alpha\big)\}$ на T^*L.

Определим на T^*L каноническую 1-форму λ по следующему правилу. Пусть $\pi : T^*L \to L$ — проекция вдоль слоя. Касательному вектору v в точке $\xi \in T^*L$, сопоставим число $\lambda(v) \stackrel{def}{=} \xi(D\pi(v))$. В координатах $(\xi_1, \ldots, \xi_n, q^1, \ldots, q^n)$ имеем

$$\lambda = \xi_i dq^i, \qquad d\lambda = d\xi_i \wedge dq^i.$$

Тогда 2-форма $\omega = d\lambda$ — симплектическая, а (ξ, q) — её координаты Дарбу.

Построенные 1-форма и 2-форма являются каноническими в том смысле, что для любого диффеоморфизма $\Phi : L \to L$ индуцированный диффеоморфизм $\Phi^* : T^*L \to T^*L$ сохраняет обе эти формы.

13.2 Пример: расслоение со слоем поверхность

Форма площади на ориентированной замкнутой поверхности является является симплектической. Произведение поверхностей — также симплектическое многообразие. А именно, пусть (P_1, ω_1) и (P_2, ω_2) — симплектические многообразия. Тогда $\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$ — симплектическая форма на $P_1 \times P_2$, где $\pi_i : P_1 \times P_2 \to P_i$ — проекция.

Эту конструкцию можно обощить на косые произведения. А именно, пусть S_1 и S_2 — поверхности с формой площади, $\widetilde{S}_2 \to S_2$ — универсальное накрытие, $\rho : \pi_1(S_2) \to \mathrm{Symp}(S_1)$ — представление фундаментальной группы поверхности S_2 в группе симплектоморфизмов поверхности S_1. Действие группы $\pi_1(S_2)$ симплектоморфизмами на S_1 и на $\widetilde{S}_2$ перенесём на $S_1 \times \widetilde{S}_2$. Тогда $P = S_1 \times \widetilde{S}_2/\pi_1(S_2)$ есть симплектическое многообразие, которое является расслоением над S_2 со слоем S_1.

Например, можно взять $S_1 = S_2 = \mathbb{T}^2$ — двумерный тор, а двум образующим фундаментальной группы тора сопоставить любые две коммутирующие матрицы из $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Эта серия примеров позволила Торстону построить так называемые некэлеровы симплектические многообразия.

13.3 Семейства отображений

В дальнейшем мы будем формулировать теоремы для семейств отображений и тензоров. Это необходимо для теорем об изотопии. Нам потребуются три типа семейств: одноточечные, двухточечные и параметризованные отрезком.

Семейством отображений $f_s : X \to Y$ из многообразия X в многообразие Y, где $s \in S$ и S — компактное многообразие, мы называем гладкое отображение $f : S \times X \to Y$. Семейством тензоров T_s типа (p, q) на многообразии M мы называем гладкое отображение $T : S \times M \to T^{p,q}M$, которое при всех $s \in S$ сопоставляет точке $x \in M$ тензор $T(s, x) \in T_x^{p,q}M$ в касательном пространстве в этой точке.

Следующие предложения легко проверить, рассматривая карты многообразий:

Предложение. *Пусть $f_s : X \to Y$ и $g_s : Y \to Z$ — семейства гладких отображений между многообразиями, где $s \in S$. При каждом s определим композицию $g_s \circ f_s : X \to Z$. Тогда $g_s \circ f_s$ — семейство гладких отображений.*

Предложение. *Пусть $f_s : X \to Y$ — семейство диффеоморфизмов. Тогда $f_s^{-1} : Y \to X$ — тоже семейство диффеоморфизмов.*

Предложение. *Тензорное произведение семейств тензоров, свёртка семейства тензоров и множество обратных тензоров семейства также являются семействами тензоров.*

Семейство векторных полей v_s на M можно рассматривать, как векторное поле на $S \times M$, доопределяя компоненту поля по S нулём. Тем самым мы получаем

Предложение. *Пусть v_s — семейство векторных полей на многообразии M, которое интегрируется на временном интервале $(-T, T)$ при всех $s \in S$ до потока из вложений $\varphi_{s,t} : U \to M$ некоторого открытого подмножества $U \subset M$. Тогда $\varphi_{s,t}$ — семейство вложений по параметру $(s, t) \in S \times (-T, T)$.*

В следующем предложении существенно используется компактность S.

Предложение. *Пусть S компактное топологическое пространство, $Q \subset X$ — подмножество топологического пространства и U — окрестность множества $S \times Q$ в $S \times X$. Тогда найдётся такая окрестность V множества Q в X, что $S \times V \subset U$.*

13.4 Трюк Мозера

Пусть λ_t — семейство дифференциальных 1-форм на многообразии M, где $t \in [0, 1]$. Пусть $d\lambda_0 = 0$ и $\omega_t = \omega_0 + d\lambda_t$ — симплектическая форма для всех $t \in [0, 1]$. Если многообразие M замкнуто, то найдётся такое семейство диффеоморфизмов $\varphi_t : M \to M$, что $\varphi_t^* \omega_t = \omega_0$ и $\varphi_0 = \mathrm{id}$.

Действительно, обозначим $\varphi_{t_0\to t_1} = \varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_0}^{-1}$ и пусть $\varphi_t(p)$ для фиксированного $p \in M$ — это интегральные линии векторного поля v_t. Тогда по определению производной Ли $\frac{d}{dt}\varphi^*_{t_0\to t}\alpha(t_0) = L_{v_{t_0}}\alpha$ для любой дифференциальной формы α. Продифференцируем требуемое равенство и применим формулу Картана:

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t)(t_0) = \frac{d}{dt}((\varphi_{t_0\to t}\varphi_{t_0})^*\omega_t)(t_0) = \varphi_{t_0}^*\frac{d}{dt}(\varphi^*_{t_0\to t}\omega_t)(t_0) = \varphi_{t_0}^*(L_{v_{t_0}}\omega_{t_0} + \dot{\omega}_{t_0}) =$$
$$= \varphi_{t_0}^* d(i_{v_{t_0}}\omega_{t_0} + \dot{\lambda}_{t_0}).$$

Тогда достаточно взять поле, которое однозначно находится из условия $i_{v_t}\omega_t = -\dot{\lambda}_t$. Оно интегрируется на всём временном отрезке, так как по предположению M компактно и без края.

Замечание. Мы будем использовать трюк Мозера для некомпактных многообразий, оговаривая условия, при которых построенное векторное поле интегрируется на некотором открытом подмножестве.

Замечание. Условие, что разность $\omega_t - \omega_0$ — это точная форма, необходимо для существования семейства диффеоморфизмов φ_t, потому что класс когомологий при обратном образе диффеоморфизма φ_t должен сохраняться — это следует из гомотопности φ_t тождественному отображению. В случае замкнутого M верен тот факт, что этого условия достаточно.

13.5 Векторные расслоения

Нам понадобится формализм векторных расслоений. Здесь мы кратко определим базовые определения, а подробнее читайте в книге [Милнор, Сташеф — Характеристические классы, §2.]

Тройка (E, M, π) называется гладким локально тривиальным векторным расслоением над M со слоем V, где V — векторное пространство, если $\pi : E \to M$ — гладкое отображение многообразий и найдётся атлас U_α многообразия M и диффеоморфизмы $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to V \times U_\alpha$, такие что

- $\pi\big|_{p^{-1}(U_\alpha)}$ совпадает с $\mathrm{pr}^2_\alpha \circ \varphi_\alpha$, где $\mathrm{pr}^2_\alpha : V \times U_\alpha \to U_\alpha$ — проекция на второй сомножитель,
- $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : V \times (U_\alpha \cap U_\beta) \to V \times (U_\alpha \cap U_\beta)$ есть изоморфизм векторного пространства V при каждом $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, гладко зависящий от точки p.

Упражнение. Покажите, что касательное и кокасательное расслоения к многообразию являются гладкими локально тривиальными векторными расслоениями.

Впоследствии гладкое локально тривиальное векторное расслоение мы будем называть векторным расслоением или просто расслоением.

Так как отображения склейки $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ сохраняют нулевой вектор каждого слоя, то множество нулевых векторов во всех слоях корректно определено и является образом при вложении $i_0 : M \to E$. Это вложение называется нулевым сечением векторного расслоения.

Пусть $\pi_i : E_i \to M$, $i = 0, 1$ — два расслоения. Тогда отображение $\varphi : E_0 \to E_1$ называется гомоморфизмом расслоений, если $\pi_1 \circ \varphi = \pi_0$ и ограничение отображения φ на каждый слой является гомоморфизмом. Аналогично определены изоморфизмы, мономорфизмы и эпиморфизмы расслоений.

Упражнение. Пусть g — метрика на многообразии M. Каждому касательному вектору $v \in T_pM$ сопоставим ковектор $v^* \in T_P^*M$, который на произвольном касательном векторе $w \in T_pM$ равен $g(v, w)$. Покажите, что отображение $v \to v^*$ задаёт изоморфизм касательного и кокасательного расслоений.

Пусть $\pi : E \to M_1$ — расслоение и $f : M_0 \to M_1$ — гладкое отображение. Определим множество

$$f^*E := \{(v, p) : p \in M_0,\ v \in E,\ \pi(v) = f(p)\},$$

и проекцию $f^*\pi$ из этого множества на M_0, которая каждой паре $(v, p) \in f^*E$ сопоставляет точку p. Тогда тройка $(f^*E, M_0, f^*\pi)$ является гладким локально тривиальным векторным расслоением, которое называется индуцированным расслоением при помощи отображения f. Обозначим отображение $f_* : f^*E \to E$, которое определено по формуле $f : (v, p) \mapsto v$.

Упражнение. Пусть $i : P \to M$ — отображение, которое задаёт вложение подмногообразия. Дифференциал Di задаёт мономорфизм расслоений $TP \to i^*TM$. Поэтому можно определить множество фактор-пространств $NP = \bigcup\limits_{p \in P} i^*T_pM/T_pP$, которое естественно проецируется на P. Докажите, что NP — гладкое локально тривиальное векторное расслоение. NP называется нормальным расслоением или расслоением нормальных векторов.

13.6 Теорема Дарбу-Вейнштейна

Лемма 1. *Пусть $\pi : E \to Q$ — локально тривиальное векторное расслоение над многообразием Q, $V \subset Q$ — окрестность нулевого сечения, ω и ω_s — симплектическая форма и семейство симплектических форм на V, которые совпадают во всех точках из Q. Тогда существует окрестность $U \supset Q$ и семейство вложений $\varphi_s : U \to V$, такие что*

- $\varphi_s\big|_Q = \mathrm{id}$,

- $\varphi_s^*\omega_s = \omega$.

Доказательство. Пусть $h_t = \times t : E \to E$ — умножение всех векторов на число t.

Переходя к подокрестности, можно считать, что V переходит в себя при гомотетиях h_t для $t \in [0, 1]$.

Заметим, что $h_t^*(\omega_s - \omega) = 0$ при $t = 0$, $h_t^*(\omega_s - \omega) = \omega_s - \omega$ при $t = 1$ и при $t > 0$

$$\frac{d}{dt} h_t^*(\omega_s - \omega)(w; \cdot, \cdot) = h_t^* L_{v_t}(\omega_s - \omega)(w; \cdot, \cdot) = h_t^* d(i_{v_t}(\omega_s - \omega))(w; \cdot, \cdot) =$$
$$= dh_t^*(i_{v_t}(\omega_s - \omega))(w; \cdot, \cdot) = d((\omega_s - \omega)(tw; w, Dh_t \cdot)),$$

где $w \in E$ и слой расслоения $\pi : E \to Q$ отождествляется с касательным пространством к этому слою, векторное поле $v_t(w) = w/t$ — это касательные вектора к траекториям потока h_t. Обозначим семейство дифференциальных 1-форм $\lambda_{s,t}(w; \cdot) = (\omega_s - \omega)(tw; w, Dh_t \cdot)$. Так как семейство $\lambda_{s,t}$ определено при всех $t \in [0, 1]$, в том числе при при $t = 0$, то по формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\omega_s - \omega = \int\limits_0^1 d\lambda_{s,t} dt = d \int\limits_0^1 \lambda_{s,t} dt.$$

Обозначим $\omega_{s,t} = \omega + d \int\limits_0^t \lambda_{s,t} dt$. Тогда с помощью трюка Мозера в качестве искомого φ_s можно взять отображение, которое сопоставляет каждой точке её образ под действием потока за время 1 вдоль векторного поля $v_{s,t}$, которое определяется из условия $i_{v_{s,t}}\omega_{s,t} = -\lambda_{s,t}$.

Так как $\lambda_{s,t}\big|_Q = 0$, то векторное поле $v_{s,t}$ на Q нулевое. Значит, для точек из некоторой окрестности U множества Q их траектории определены и остаются в V вплоть до времени 1 и на Q поток тождественный. $\square$

Теорема. *Пусть V — окрестность подмногообразия Q в многообразии M, ω и ω_s — симплектическая форма и семейство симплектических форм на V, которые совпадают во всех точках из Q. Тогда существует окрестность $U \supset Q$ и семейство вложений $\varphi_s : U \to M$, такие что*

- $\varphi_s\big|_Q = \mathrm{id}$,
- $\varphi_s^*\omega_s = \omega$.

Доказательство. Выберем произвольную метрику g на M. Введём обозначение для множества касательных к M векторов, ортогональных подмногообразию Q:

$$TQ^\perp = \bigcup_{q \in Q} T_qQ^\perp = \{v \in T_qM : q \in Q,\ g(v, w) = 0\ \forall w \in T_qQ\}.$$

Многообразие $TQ^\perp$ есть тотальное пространство локально тривиального расслоения над Q. Определим гладкое отображение

$$i = \exp_q(v) : TQ^\perp \to M,$$

где $\exp_q$ — экспоненциальное отображение в точке q и $v \in T_qQ^\perp$. По свойству экспоненциального отображения найдётся окрестность $W_1 \subset i^{-1}(V)$ нулевого сечения Q, в которой i — вложение.

Тогда $i^*\omega$ — симплектическая форма и $i^*\omega_s$ — семейство симплектических форм в W_1. По лемме 1 найдётся окрестность $W_2 \subset W_1$ и семейство таких вложений $\psi_s : W_2 \to W_1$, что

- $\psi_s\big|_Q = \mathrm{id}$,
- $\psi_s^* i^*\omega_s = i^*\omega$.

Тогда $\varphi_s = i \circ \psi_s \circ i^{-1} : i(W_2) \to M$ — искомое семейство вложений.
$\square$

14 Почти комплексные структуры

14.1 Операторы комплексной структуры, согласованные с симплектической формой

Пусть (V,ω) — симплектическое векторное пространство. Тогда оператор $J : V \to V$ называется оператором комплексной структуры, если $J^2 = -\mathrm{Id}$. Оператор комплексной структуры называется согласованным с формой ω, если $\omega(\cdot, J\cdot)$ есть скалярное произведение. Множество операторов комплексной структуры, согласованных с формой ω, обозначим за $\mathcal{J}(\omega)$.

Пример 1. $V = \mathbb{C}^n$, h — положительно определённая эрмитова форма на V. Тогда $\omega = \operatorname{Im} h$ — симплектическая структура, а $g = \omega(\cdot, \mathrm{i}\cdot) = \operatorname{Re} h$ — скалярное произведение. В ортогональных координатах z^k

$$
\begin{aligned}
h(z_1, z_2) &= \sum_{k=1}^{n} \overline{z_1^k} z_2^k, \\
\omega(z_1, z_2) &= \sum_{k=1}^{n} (x_1^k y_2^k - y_1^k x_2^k), \\
g(z_1, z_2) &= \sum_{k=1}^{n} (x_1^k x_2^k + y_1^k y_2^k),
\end{aligned}
$$

где $z^k = x^k + \mathrm{i} y^k$.

Пример 2. $V = W^* \oplus W$, $\omega(\xi_1 \oplus w_1, \xi_2 \oplus w_2) = \xi_1(w_2) - \xi_2(w_1)$ — каноническая симплектическая форма.

Пусть g — скалярное произведение на W. Положим $w^* = g(w, \cdot)$. Положим $\xi^* = w$, если $w^* = \xi$. Пусть $g^{-1}(\xi_1, \xi_2) = g(\xi_1^*, \xi_2^*)$.

Тогда $G = g^{-1} \oplus g$ — скалярное произведение на V, $J : \xi \oplus w \mapsto -w^* \oplus \xi^*$ — оператор комплексной структуры и $G(v_1, v_2) = \omega(v_1, J v_2)$.

Упражнение. Пусть симплектическое пространство с формой ω разложено в прямую сумму лагранжевых подпространств $V = L_1 \oplus L_2$ и на L_1 определена метрика g. Докажите, что метрика единственным образом продолжается до метрики, согласованной с симплектической формой и относительно которой L_1 и L_2 ортогональны.

Упражнение. Пусть симплектическое пространство с формой ω разложено в прямую сумму лагранжевых подпространств $V = L_1 \oplus L_2$. С помощью предыдущего упражнения отождествите пространство комплексных структур, согласованных с ω, с парами из скалярного произведения на L_1 и симметричной билинейной формы на L_2.

Лемма 1. *Пусть* $J \in \mathcal{J}(\omega)$. *Тогда* $J \in \mathrm{Sp}(\omega)$.

Доказательство. Так как $\omega(\cdot, J\cdot)$ — скалярное произведение, то $\omega(u, Jv) = \omega(v, Ju) = -\omega(Ju, v)$. Подставляя $v = Jw$, получаем $-\omega(u, w) = -\omega(Ju, Jw)$, что и требовалось. $\square$

Упражнение. Докажите, что оператор J комплексной структуры согласован с симплектической формой ω, если и только если J — симплектический и гамильтонов, то есть $\omega(u, v) = \omega(Ju, Jv)$ и $\omega(u, Jv) = -\omega(Ju, v)$ для любых векторов u и v.

Теорема 1. $\mathcal{J}(\omega)$ *стягиваемо.*

Доказательство. Как показывает пример выше, всегда найдётся хотя бы одна комплексная структура J_0, согласованная с формой ω. Докажем, что деформационная ретракция симплектической группы на унитарные операторы (коммутирующие с J_0), построенная в разделе 3.1, осуществляет стягивание пространства $\mathcal{J}(\omega)$ в точку J_0.

Для этого достаточно показать, что JJ_0^{-1} — положительный оператор (относительно $\omega(\cdot, J_0\cdot)$), если и только если $J \in \mathcal{J}(\omega)$. Тогда $J = (JJ_0^{-1})J_0$ будет полярным разложением, а $J(t) = (JJ_0^{-1})^{1-t}J_0$ будет стягиванием.

Проверяем по определению. Обозначим форму $g(u, v) = \omega(u, J_0 v)$.

Тогда левые части двух следующих строчек равны, если оператор JJ_0^{-1} самосопряжён, а правые равны, если $\omega(\cdot, J\cdot)$ — симметричная форма:

$$\begin{aligned} &g(JJ_0^{-1}u, v) = \omega(JJ_0^{-1}u, J_0 v), \\ &\qquad g(u, JJ_0^{-1}v) = \omega(u, (-J_0)J(-J_0^{-1})v) = \omega(u, J_0^{-1}JJ_0 v) = -\omega(J_0^{-1}u, JJ_0 v). \end{aligned}$$

Если симметричность формы $\omega(\cdot, J\cdot)$ уже известна, то из следующего равенства вытекает, что положительность JJ_0^{-1} равносильна положительной определённости $\omega(\cdot, J\cdot)$:

$$g(JJ_0^{-1}u, u) = \omega(JJ_0^{-1}u, J_0 u) = -\omega(J_0 u, J(-J_0)u) = \omega(J_0 u, J(J_0 u)).$$

$\square$

14.2 Теорема существования почти комплексной структуры

Почти комплексным многообразием называется пара (M, J), где M — гладкое многообразие, а $J(p) : T_pM \to T_pM$ — оператор комплексной структуры в каждом касательном пространстве, гладко зависящий от точки.

Будем говорить, что симплектическая форма ω на многообразии M и почти комплексная структура J согласованы, если $\omega(\cdot, J\cdot)$ — это метрика на M. В этом случае будем писать (M, ω, J).

Теорема 2. *На симплектическом многообразии существует согласованная с симплектической формой почти комплексная структура.*

Изложим идею доказательства этой теоремы. Объединение по точкам многообразия пространств операторов комплексной структуры в касательных пространствах (согласованных с симплектической формой) есть расслоение над многообразием. Это расслоение локально тривиально в силу теоремы Дарбу о существовании локальных координат, в которых симплектическая форма имеет постоянные коэффициенты. Любое локально тривиальное расслоение со стягиваемым слоем над пространством, имеющим гомотопический тип клеточного пространства, имеет сечение [Фоменко, Фукс §18.5]. Слой стягиваем по теореме 1. Гладкое многообразие гомотопически эквивалентно клеточному пространству [Милнор, Теория Морса]. Поэтому мы имеем сечение расслоения комплексных структур, а это есть не что иное, как почти комплексная структура.

14.3 Гамильтоново векторное поле

Пусть X_H — гамильтоново векторное поле относительно функции H на почти комплексном симплектическом многообразии (M, ω, J). Обозначим метрику $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$. Тогда

$$dH(\cdot) = \omega(\cdot, X_H) = g(\cdot, J^{-1}X_H).$$

Значит,

$$X_H = J\nabla H,$$

где ∇H — это градиент функции H относительно метрики g.

14.4 Пример: кокасательное расслоение

В разделе 13.1 мы ввели симплектическую структуру на многообразии касательных ковекторов T^*L. В этом разделе мы введём почти комплексную структуру и метрику, согласованные с симплектической формой.

Напомним, что каноническая 2-форма $\omega = d\lambda$ определена на T^*L так, что для любого касательного вектора $v \in T_\xi(T^*L)$ выполнено $\lambda(v) = \xi(D\pi(v))$, где $\pi : T^*L \to L$ — естественная проекция.

Подпространство $H_\xi \subset T_\xi(T^*L)$ будем называть горизонтальным, если оно биективно проецируется на $T_{\pi(\xi)}L$ при отображении $D\pi$.

Теорема 3. *Пусть $\pi : T^*L \to L$ — кокасательное расслоение. Пусть в точке $\xi \in T^*L$ зафиксировано горизонтальное лагранжево подпространство H_ξ. Тогда отображение*

$$T_\xi(T^*L) = T_\xi(T^*_{\pi(\xi)}L) \oplus H_\xi \to T^*_{\pi(\xi)}L \oplus T_{\pi(\xi)}L \qquad (6)$$

есть симплектоморфизм векторных пространств, где на первом слагаемом отображение есть естественное отождествление векторного пространства с его касательными пространствами, на втором слагаемом — проекция $D\pi$, а в образе берётся каноническая симплектичесая структура (из примера 2 в разделе 14.1).

Доказательство. Так как H_ξ и $T_{\pi(\xi)}L$ лагранжевы, то достаточно проверить тот факт, что значение симплектической формы при отображении не меняется, только для тех пар векторов, один из которых лежит в $T_\xi(T^*_{\pi(\xi)}L)$. Тогда всё следует из леммы:

Лемма 2. Пусть $D\pi_\xi(v_1) = 0$ и $v_2 \in T_\xi(T^*L)$. Тогда $\omega(v_1, v_2) = v_1(D\pi(v_2))$.

Доказательство. Продолжим векторные поля v_1 и v_2 в окрестность точки ξ, так чтобы $D\pi(v_1) = 0$. Пусть $\xi_1(t)$ — интегральная линия векторного поля v_1, такая что $\xi_1(0) = \xi$. Пусть L_{v_1} — производная Ли вдоль поля v_1. Тогда

$$v_1(D\pi(v_2)) = \frac{d}{dt}(\xi_1(D\pi(v_2))) = L_{v_1}(\lambda(v_2)) = (L_{v_1}\lambda)(v_2) + \lambda(L_{v_1}v_2) =$$
$$= (i_{v_1}d\lambda + di_{v_1}\lambda)(v_2)) + \lambda([v_1, v_2]) = (i_{v_1}\omega)(v_2) + \xi(D\pi([v_1, v_2])) = \omega(v_1, v_2) + \xi([0, D\pi(v_2)]).$$

□

Упражнение. Докажите, что в локальных координатах, введённых в разделе 13.1,

$$T_\xi(T^*_{\pi(\xi)}L) : dq^i = 0.$$

Упражнение. Пусть $v_1 \in \ker D\pi$. Докажите, что в локальных координатах

$$v_1(D\pi(v_2)) = \omega(v_1, v_2) = d\xi_i(v_1)dq^i(v_2).$$

□

Если в касательном пространстве к каждой точке тотального пространства расслоения выбрано горизонтальное подпространство, то говорят, что в расслоении задана связность. Проиллюстрируем это на примере T^*L и произвольной аффинной связности на L.

Пусть ∇ — аффинная связность на многообразии L. Рассмотрим все гладкие кривые $\xi(t)$, для которых

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \xi)(0) \neq 0,$$
$$\nabla_{\frac{d}{dt}\pi\circ\xi(0)}\xi = 0.$$

Очевидно, что последнее есть линейное условие на касательный вектор $\dot{\xi}(0)$. Это уравнение задаёт горизонтальное подпространство $H_{\xi(0)} \subset T_{\xi(0)}(T^*L)$.

Упражнение. Пусть Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля связности ∇. Тогда H_ξ задаётся системой уравнений:

$$H_\xi : \dot{\xi}_i - \Gamma_{li}^k \xi_k \dot{q}^l = 0.$$

Лемма 3. Горизонтальные подпространства $H_\xi \subset T_\xi(T^*L)$ относительно аффинной связности ∇ на L лагранжевы, если и только если связность ∇ симметрична.

Доказательство. Так как $\dim H_\xi = \dim L$, то H_ξ лагранжево, если и только если ограничение на H_ξ симплектической формы есть тождественный нуль.

Для любых векторных полей v_1, v_2 и точной 2-формы $\omega = d\lambda$ верно равенство

$$\omega(v_1, v_2) = i_{v_2} i_{v_1} d\lambda = i_{v_2}(L_{v_1}\lambda - d i_{v_1}\lambda) = (L_{v_1} i_{v_2}\lambda - \lambda(L_{v_1} v_2)) - i_{v_2} d i_{v_1}\lambda =$$
$$= L_{v_1}(\lambda(v_2)) - L_{v_2}(\lambda(v_1)) - \lambda([v_1, v_2]).$$

Пусть $\xi \in T^*L$, u_1, u_2 — ненулевые векторные поля в окрестности точки $\pi(\xi)$, v_i — такие векторные поля в окрестности точки ξ, что v_i лежат в горизонтальных подпространствах и $D\pi(v_i) = u_i$. Пусть $\xi_i(t)$ — интегральные линии полей v_i, такие что $\xi_i(0) = \xi$. Тогда продолжим равенство

$$= \frac{d}{dt}\left(\xi_1(u_2)\right) - \frac{d}{dt}\left(\xi_2(u_1)\right) - \xi(D\pi([v_1, v_2]) =$$
$$= (\nabla_{u_1}\xi_1(u_2) + \xi(\nabla_{u_1}u_2)) - (\nabla_{u_2}\xi_2(u_1) + \xi(\nabla_{u_2}u_1)) - \xi([u_1, u_2]) = \xi(\nabla_{u_1}u_2 - \nabla_{u_2}u_1 - [u_1, u_2]).$$

Конец цепочки равенств всегда нулевой, если аффинная связность симметрична, а начало цепочки всегда нулевое, если горизонтальные подпространства H_ξ лагранжевы.

Упражнение. Докажите эту лемму, проверив, что $\dot{\xi}_i - \Gamma_{li}^k \xi_k \dot{q}^l = 0$ — уравнение на лагранжево подпространство относительно формы $d\xi_i \wedge dq^i$, если и только если $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ для всех i, j, k.

□

Тем самым пример 2, отображение 6 из теоремы 3 и лемма 3 позволяют по метрике на многообразии L построить почти комплексную структуру на T^*L, согласованную с канонической симплектической формой, так как связность Леви-Чивиты симметрична.

Упражнение. Пусть (ξ_i, q^j) — локальные координаты на T^*L, введённые в разделе 13.1. Пусть g — метрика на L, G и J — метрика и оператор почти комплексной структуры на T^*L, построенные выше. Тогда

$$G_{(\xi,q)}((\dot{\xi}_1, \dot{q}_1), (\dot{\xi}_2, \dot{q}_2)) = g^{ij}\left((\dot{\xi}_1)_i - \Gamma^k_{li}\xi_k\dot{q}^l_1\right)\left((\dot{\xi}_2)_j - \Gamma^k_{lj}\xi_k\dot{q}^l_2\right) + g_{ij}\dot{q}^i_1 q^j_2,$$

$$J_{(\xi,q)}(\dot{\xi}, 0) = (\dot{\xi}', \dot{q}'), \text{ где } \dot{\xi}'_i = g^{jk}\Gamma^l_{ij}\dot{\xi}_k\xi_l \text{ и } \dot{q}'^i = g^{ij}\dot{\xi}_j.$$

15 Подмногообразия

15.1 Лагранжевы подмногообразия

Подмногообразие L симплектического многообразия (M, ω) называется лагранжевым, если ограничение формы ω на касательное пространство к L нулевое и $\dim L = \dim M/2$.

Пример. $M = T^*L$, ω_{can} — каноническая 2-форма.

Тогда $L \subset T^*L$ (подмногообразие нулевых ковекторов) и $T^*_{q_0}L$ (пространство ковекторов в данной точке $q_0 \in L$) — лагранжевы подмногообразия T^*L.

Действительно, в локальных координатах, введённых в 13.1,

$$\begin{aligned} \omega_{can} = d\xi_i \wedge dq^i, \\ L : \xi_i = 0, \\ TL : d\xi_i = 0, \\ T^*_{q_0}L : q^i = q^i_0, \\ T(T^*_{q_0}L) : dq^i = 0. \end{aligned}$$

Откуда очевидно, что ограничение формы на касательные пространства к L и $T^*_{q_0}L$ нулевое. Также $\dim L = \dim T^*_{q_0}L = \dim T^*L/2$.

Упражнение. Пусть $\alpha \in \Omega^1(L)$ — дифференциальная 1-форма на L и пусть

$$\operatorname{graph}(\alpha) = \{\alpha_q \in T^*_qL\} \subset T^*L.$$

Докажите, что $\operatorname{graph}(\alpha)$ — лагранжево подмногообразие T^*L, если и только если $d\alpha = 0$.

Упражнение. Пусть $L_1 \subset L_2$ — подмногообразие и $\pi_2 : T^*L_2 \to L_2$ — проекция, которая ставит в соответствие ковектору из пространства $T^*_qL_2$ точку q. Тогда $\{\xi \in T^*L_2 : \pi_2(\xi) \in L_1, \xi\big|_{TL_1} = 0\}$ — лагранжево.

Пример. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Тогда диагональ

$$\Delta = \{(x, x) \in M \times M\} \subset (M \times M, \omega \oplus -\omega)$$

— лагранжево подмногообразие. Действительно, касательное пространство к $M \times M$ в каждой точке естественно раскладывается в прямую сумму $T_{x,y}M \times M = T_xM \oplus T_yM$, любой касательный вектор к Δ тогда имеет вид $v \oplus v$. Тогда

$$\omega \oplus -\omega(v \oplus v, w \oplus w) = \omega(v, w) + (-\omega(v, w)) = 0.$$

Очевидно, $\dim\Delta = \dim M = \dim M\times M/2$.

Упражнение. Пусть (M,ω) — симплектическое многообразие, дано отображение $\varphi : M \to M$ и его график

$$\operatorname{graph}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \in M \times M\}.$$

Тогда график $\operatorname{graph}(\varphi) \subset (M\times M, \omega \oplus -\omega)$ — лагранжево подмногообразие $\iff$ φ — симплектоморфизм.

Пример. Кривые на поверхности — лагранжевы подмногообразия относительно формы площади.

15.2 Симплектические подмногообразия

Подмногообразие P симплектического многообразия (M,ω) называется симплектическим, если ограничение формы ω на касательное пространство к P невырожденно.

Пример. Пусть h — положительно определённая эрмитова форма в $\mathbb{C}^n$, $\omega = \operatorname{Im} h$ — симплектическая форма. Пусть подмногообразие $P \subset \mathbb{C}^n$ задано системой полиномиальных уравнений с коэффициентами в $\mathbb{C}$. Тогда P — симплектическое подмногообразие. Это следует из следующего упражнения по линейной алгебре.

Упражнение. Пусть (V,ω) — симплектическое векторное пространство, $J \in \mathcal{J}(\omega)$ (обозначение раздела 14.1), $W \subset V$ — J-инвариантное подпространство. Тогда W — симплектическое подпространство.

Упражнение. Рассмотрим симплектическую структуру на $\mathbb{C}P^n$, введённую в разделе 12.6. Тогда подмногообразие $\mathbb{C}P^n$, заданное системой однородных полиномиальных уравнений, симплектическое.

Упражнение. Пусть $L_1 \subset L_2$ — подмногообразие и g — метрика на L_2. Определим вложение $i : T^*L_1 \to T^*L_2$, доопределив ковектор в точке q_1 нулём на ортогональном дополнении $(di(T_{q_1}L_1))^\perp$ нулём. Тогда $i(T^*L_1)$ — симплектическое подмногообразие и отображение i^* переводит каноническую 2-форму на T^*L_2 в каноническую 2-форму на T^*L_1.

Пример. Пусть f — гладкая функция на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда её график

$$\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3\} \subset (\mathbb{R}^4, dx\wedge dy + dz \wedge dt)$$

есть симплектическое подмногообразие. Действительно, ограничение формы $dz \wedge dt$ на $\mathbb{R}^3$ нулевое, а форма $dx \wedge dy$ невырожденна на графике, так как его проекция на плоскость Oxy есть диффеоморфизм.

Пример. $M \times \{pt\} \subset (M \times M, \omega \oplus -\omega)$ — симплектическое подмногообразие.

15.3 Изотропные и коизотропные подмногообразия

Подмногообразие Q симплектического многообразия (M, ω) называется изотропным, если ограничение формы ω на касательное пространство к Q нулевое.

Подмногообразие Q симплектического многообразия (M, ω) называется коизотропным, если $(T_qQ)^\omega \subset T_qQ$ для всех $q \in Q$.

Пример. Лагранжевы многообразия изотропны и коизотропны.

Подмногообразие лагранжева подмногообразия изотропно.

Подмногообразие, на котором существует лагранжево слоение, коизотропно.

Пример. $L \subset M,\ \dim L = 1 \implies L$ — изотропно.

$L \subset M,\ \dim L = \dim M - 1 \implies L$ — коизотропно.

Упражнение. Говорят, что на многообразии Q задана структура слоения, если многообразие Q представлено в виде объединения листов F_σ, то есть

$$Q = \bigcup_\sigma F_\sigma,$$

так что для любой точки $x \in Q$ существует такая окрестность $U_x = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, что пересечение любого листа F_σ с этой окрестностью U_x либо пусто, либо каждая компонента линейной связности этого пересечения есть $pt \times \mathbb{R}^l$. Число l называется размерностью слоения.

Докажите, что на коизотропном подмногообразии Q есть слоение, касательное пространство к слоям которого есть ядро ограничения симплектической формы на подмногообразие Q.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Фробениуса об интегрируемости распределения.

15.4 Окрестность лагранжева подмногообразия

Мы будем считать, что многообразие L отождествлено с множеством нулевых ковекторов в T^*L и симплектическую форму на T^*L мы будем обозначать ω_{can}.

Будем придерживаться соглашений раздела 13.3 о семействах отображений и тензоров.

Теорема. *Пусть $i_s : L \to M$ — семейство вложений лагранжева подмногообразия в симплектическое многообразие (M,ω). Тогда существует семейство продолжений i_s на окрестность U множества L в T^*L, такое что $i_s : U \to i_s(U)$ — симплектоморфизм.*

Доказательство. Пусть J — почти комплексная структура на M и g — метрика на M, согласованные с ω.

На L заведём метрику $g_s = i_s^* g$ — обратный образ метрики g при отображении i_s. Любому ковектору ξ_q в точке $q \in L$ сопоставим касательный вектор $g_s^{-1}\xi_q \in T_qL$ с помощью метрики g_s:

$$\xi_q(v) = g_s(v, g_s^{-1}\xi_q) \text{ для любого } v \in T_qL.$$

Будем отождествлять L со своим образом в M при вложении i_s, чтобы упростить обозначения. Продолжим отображение i_s до всего T^*L следующим способом:

$$i_s(\xi_q) := \exp_{i_s(q)}(-J(g_s^{-1}\xi_q)),$$

где $\exp_x$ — экспоненциальное отображение в точке $x \in M$. Проверим, что i_s сохраняет симплектическую форму в точках L. Пусть $\eta_1 \oplus v_1, \eta_2 \oplus v_2 \in T_q(T^*L) = T_q^*L \oplus T_qL$. Тогда $Di_s(\eta_1 \oplus v_1) = -J(g_s^{-1}\eta_1) \oplus v_1$ и

$$\begin{aligned}\omega(Di_s(\eta_1 \oplus v_1), Di_s(\eta_2 \oplus v_2)) = \omega(-J(g_s^{-1}\eta_1) \oplus v_1, -J(g_s^{-1}\eta_2) \oplus v_2) = \\ = \omega(-J(g_s^{-1}\eta_1), v_2) + \omega(v_1, -J(g_s^{-1}\eta_2)) =\end{aligned}$$

В последнем переходе два опущенных слагаемых равны нулю, так как L лагранжево по условию, а также JT_qL лагранжево, как следует из следующего упражнения по линейной алгебре:

Упражнение. Пусть комплексная структура J согласована с симплектической формой векторного пространства и пусть L — лагранжево подпространство. Тогда JL лагранжево и ортогонально L.

Продолжим равенство по определению метрики g:

$$= g(g_s^{-1}\eta_1, v_2) - g(v_1, g_s^{-1}\eta_2) = \eta_1(v_2) - \eta_2(v_1) = \omega_{can}(\eta_1 \oplus v_1, \eta_2 \oplus v_2).$$

Мы получаем семейство симплектических форм $i_s^*\omega$ на T^*L, которые совпадают в точках L с формой ω_{can}.

Тогда по лемме 1 к теореме Дарбу-Вейнштейна из раздела 13.6 найдётся окрестность U множества L в T^*L и семейство отображений $\varphi_s : U \to T^*L$, что $\varphi_s\big|_L = \mathrm{id}$ и $i_s \circ \varphi_s$ — симплектоморфизм. $\square$

16 Окрестности и изотопии

16.1 Окрестность симплектического подмногообразия

В прошлой лекции мы увидели, что у двух диффеоморфных лагранжевых подмногообразий найдутся симплектоморфные друг другу окрестности. Перейдём к симплектическому случаю.

Пусть P — симплектическое подмногообразие в (M, ω). Обозначим расслоение косоортогональных дополнений

$$TP^\omega = \bigcup_{p \in P} T_pP^\omega = \{v \in T_pM : p \in P,\ \omega(v, w) = 0\ \forall w \in T_pP\}.$$

Так как форма ω невырожденна на касательных пространствах к подмногообразию P, то TP^ω естественно отождествляется с нормальным расслоением

$$NP = \bigcup_{p \in P} T_pM / T_pP$$

при проекции $T_pM \to NP_p$. Нормальное расслоение, как известно [Bredon, Topology and Geometry, §II.11], локально тривиально. Поэтому TP^ω локально тривиально.

В каждом векторном пространстве T_pP^ω возникает невырожденная кососимметричная 2-форма, гладко зависящая от точки p, полученная ограничением формы ω. Векторные расслоения с симплектической формой в каждом слое будем называть симплектическими, а изоморфизмы симплектических расслоений, сохраняющие симплектическую форму, будем называть симплектоморфизмами расслоений.

Теорема. *Пусть P — симплектическое подмногообразие в (M, ω), $i_s : P \to M'$ — семейство вложений в симплектическое многообразие (M', ω'). Пусть $i_s^*\omega'\big|_{TP} = \omega\big|_{TP}$ и существует семейство симплектоморфизмов расслоений $\chi_s : TP^\omega \to i_s^* T i_s(P)^{\omega'}$. Тогда найдётся окрестность $U \supset P$ в M и семейство продолжений $j_s : U \to M'$, $j_s\big|_P = i_s$, такие что*

- *j_s — гладкое вложение и $j_s^*\omega' = \omega$*
- *ограничение дифференциала $Dj_s : TP^\omega \to T i_s(P)^{\omega'}$ совпадает с $(i_s)_* \circ \chi_s$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству лагранжева случая.

Пусть g и g' — любые метрики на M и M' соответственно. Пусть $\psi : TP^\omega \to M$ и $\psi_s : i_s^* T i_s(P)^{\omega'} \to M'$ — экспоненциальные отображения. Так как дифференциал экспоненциальных отображений в точках P и $i_s(P)$ тождественен, то найдутся окрестности $V, W \supset P$ в TP^ω и $i_s^* T i_s(P)^{\omega'}$ соответственно, на которых отображения ψ и ψ_s являются вложениями.

$$
\begin{array}{ccc}
V & & W \\
\cap & & \cap \\
TP^{\omega} & \xrightarrow{\chi_s} & i_s^* T i_s(P)^{\omega'} \\
\psi \downarrow & & \psi_s \downarrow \\
M & & M'
\end{array}
$$

Возможно, заменяя V на $V \cap \chi_s^{-1}(W)$, можно считать, что $\chi_s(V) \subset W$.

Так как χ_s сохраняет симплектическую форму и дифференциал экспоненциальных отображений ψ и ψ_s в точках P и $i_s(P)$ соответственно тождественен, то на $P \subset TP^{\omega}$ имеем $\psi^*\omega = \chi_s^* \psi_s^* \omega'$.

Тогда по лемме 1 к теореме Дарбу-Вейнштейна из раздела 13.6 найдётся окрестность $U \subset V$ множества P в TP^{ω} и семейство отображений $\varphi_s : U \to TP^{\omega}$, такие что $\varphi_s\big|_P = \mathrm{id}$ и

$$\varphi_s^*(\chi_s^* \psi_s^* \omega') = \psi^*\omega.$$

Поэтому отображение $j_s = \psi_s \circ \chi_s \circ \varphi_s \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to M'$ — искомое. $\square$

В теореме есть три условия на существование симплектоморфных друг другу окрестностей у двух диффеоморфных друг другу симплектических подмногообразий: существование симплектоморфизма самих подмногообразий, изоморфизма их нормальных расслоений и симплектоморфизма их нормальных расслоений. Следующие примеры показывают, что каждое из этих условий необходимо.

Пример 1. Пусть (P, ω) — замкнутое симплектическое многообразие, Тогда (P, ω) и $(P, 2\omega)$ не симплектоморфны. Действительно, пусть $i : (P, \omega) \to (P, 2\omega)$ — симплектоморфизм. Тогда $2i^*\omega = \omega$ и $2^{\dim M/2} \int\limits_P i^* \omega^{\dim M/2} = \int\limits_P \omega^{\dim M/2}$. Но для любой формы объёма $d\mathrm{Vol}$ и диффеоморфизма i выполнено $\int\limits_P i^* d\mathrm{Vol} = \pm \int\limits_P d\mathrm{Vol}$, противоречие.

Пример 2. Пусть (P, ω) — симплектическое многообразие, ω_k — стандартная симплектическая форма в $\mathbb{R}^{2k}$. Рассмотрим формы $\omega \oplus \omega_{k_i}$ на многообразиях $M_i = P \times \mathbb{R}^{2k_i}$ при $i = 0, 1$. Если $k_0 \neq k_1$, то никакая окрестность P в M_0 не диффеоморфна окрестности P в M_1 из-за несовпадения размерностей.

Пример 3. Рассмотрим симплектическое многообразие $\mathbb{C}P^2$ из примера раздела 12.6. Рассмотрим любую проективную прямую $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$. Она является симплектическим подмногообразием. Покажем, что его нормальное расслоение нетривиально.

Пусть оно тривиально. Тогда с помощью произвольной метрики и экспоненциального отображения некоторую окрестность подмногообразия $\mathbb{C}P^1$ можно отождествить с $D^2 \times \mathbb{C}P^1$, где D^2 — это двумерный диск. Возьмём другую проективную прямую, достаточно близкую к исходной, чтобы она пересекала каждый диск D^2 в одной точке. Так как любые две прямые пересекаются трансверсально в единственной точке, то вторая прямая даёт отображение $\mathbb{C}P^1 \to D^2$, относительно которого точка $0 \in D^2$

регулярна и имеет единственный прообраз. Тогда степень такого отображения ненулевая, см. книгу [Милнор, Уоллес — Дифференциальная топология, с. 213]. Но это невозможно, так как $\mathbb{C}P^1$ — замкнутое ориентируемое многообразие, а D^2 — многообразие с краем.

Вообще, нормальное расслоение имеет сечение, если и только если индекс самопересечения подмногообразия равен 0.

Пример 4. Пусть $X = \mathrm{GL}(4)/\mathrm{Sp}(4)$ — пространство симплектических форм в $\mathbb{R}^4$. Заметим, что $\pi_2(X) \neq 0$. Действительно, из точной гомотопической последовательности расслоения $\mathrm{GL}(4) \to X$ получаем:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_2(X) & \to & \pi_1(\mathrm{Sp}(4)) & \to & \pi_1(\mathrm{GL}(4)) \\ & & \| & & \| \\ & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Средний член равен $\mathbb{Z}$ (3.1 и 3.2), правый, как известно, равен $\mathbb{Z}_2$. Значит, ядро правой стрелки нетривиально. Поэтому образ левой стрелки нетривиален, и, значит, $\pi_2(X) \neq 0$.

Пусть $\Omega : S^2 \to X$ — гладкое отображение, которое задаёт нетривиальный элемент $\pi_2(X)$. Тогда в каждом слое над точкой $p \in S^2$ тривиального расслоения $\mathbb{R}^4 \times S^2$ мы получаем симплектическую форму $\Omega(p)$. Причём полученное симплектическое расслоение не симплектоморфно тривиальному расслоению с постоянной по p симплектической формой.

Как показывает следующее утверждение, найдётся такое вложение сферы как симплектического подмногообразия, что его нормальное расслоение будет симплектоморфно построенному $(\mathbb{R}^4 \times S^2, \Omega(p))$.

Лемма 1. *Пусть ω — симплектическая форма на многообразии P, $\Omega(p)$ — симплектическая форма в $\mathbb{R}^{2k}$, гладко зависящая от точки $p \in P$, $\pi : \mathbb{R}^{2k} \times P \to P$ — проекция на второй сомножитель. Тогда найдётся дифференциальная 1-форма λ на многообразии $\mathbb{R}^{2k} \times P$ и окрестность $U \supset \{0\} \times P$, такие что*

- $d\lambda = \Omega(p)$ *вдоль каждого слоя проекции* π,
- $\pi^*\omega + d\lambda$ — *симплектическая форма на* U,
- *подмногообразие* $\{0\} \times P$ — *симплектическое относительно формы* $\pi^*\omega + d\lambda$.

Доказательство. Имеем $\Omega(p) = \Omega_{ij}(p)dy^i \wedge dy^j$ для некоторых гладких функций Ω_{ij} на P. Положим

$$\lambda = \Omega_{ij}(p)y^i dy^j.$$

Тогда

$$d\lambda = \Omega_{ij}(p)dy^i \wedge dy^j + y^i d\Omega_{ij} \wedge dy^j.$$

Пусть $(0, p) \in \{0\} \times P$. Форма $d\lambda$ совпадает с $\Omega(p)$ вдоль слоя, а $T_{(0,p)}(\{0\} \times P)$ лежит в её ядре. Форма $\pi^*\omega$ невырожденна вдоль $T_{(0,p)}(\{0\} \times P)$ и касательное пространство к слою лежит в её ядре. Поэтому форма $\pi^*\omega + d\lambda$ невырожденна в каждом пространстве $T_{(0,p)}(\mathbb{R}^{2k} \times P)$ и $T_{(0,p)}(\{0\} \times P)$. Значит, найдётся окрестность U нулевого сечения $\{0\} \times P$, в которой $\pi^*\omega + d\lambda$ — симплектическая форма и P — симплектическое подмногообразие относительно этой формы.

$\square$

Замечание. Эта лемма показывает, что любое симплектическое расслоение над симплектическим многообразием, если топологически расслоение тривиально, может быть реализовано, как нормальное расслоение к этому многообразию как симплектическому подмногообразию при некотором вложении. Аналогичный факт верен и без допущения топологической тривиальности расслоения.

16.2 Локальные координаты

16.2.1 Лагранжев случай

Пусть $p \in L$ — точка лагранжева подмногообразия (M^{2n}, ω). Тогда найдётся такая её окрестность U и такие координаты p^i, q^i в этой окрестности, что

- $L \cap U : q^i = 0, \ i = 1, \dots, n,$
- $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i.$

Действительно, рассмотрим $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой $\sum\limits_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$ и лагранжево подпространство $\Pi : q^i = 0$ при $i = 1, \dots, n$.

Рассмотрим такую окрестность V точки p, чтобы её пересечение $V \cap L$ с лагранжевым подмногообразием было диффеоморфно Π. По теореме из предыдущей лекции этот диффеоморфизм продолжается до симплектоморфизма на образ некоторой окрестности $U \supset L$. Этот симплектоморфизм и даёт искомые координаты.

16.2.2 Симплектический случай

Пусть $p \in P^{2k}$ — точка симплектического подмногообразия (M^{2n}, ω). Тогда найдётся такая её окрестность U и такие координаты p^i, q^i в этой окрестности, что

- $P \cap U : p^i, q^i = 0, \ i = 1, \dots, k,$
- $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i.$

Рассмотрим $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой $\omega' = \sum\limits_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i$ и симплектическое подпространство $\Pi : p^i, q^i = 0$ при $i = 1, \dots, k$.

Пусть $p \in P$. По теореме Дарбу найдутся окрестности $V \ni p$ в P и $W \subset \Pi$ и симплектоморфизм $\varphi : V \to W$. Расслоение $TW^{\omega'}$ косоортогональных дополнений к W можно тривиализовать, выбрав в каждом слое базис Дарбу $\{\frac{\partial}{\partial p^i}, \frac{\partial}{\partial q^i}\}_{i=k+1,\dots,n}$. Если мы построим базис Дарбу в каждом слое расслоения TV_1^{ω}, где $p \in V_1 \subset V$, то мы сможем определить симплектоморфизм расслоений $TV_1^{\omega} \to \varphi^* T\varphi(V_1)^{\omega}$, отправляя базис Дарбу в базис Дарбу. Тогда мы используем теорему из раздела 16.1 и получим искомую окрестность и координаты в ней.

Пусть $V_1 \subset V$ — произвольная окрестность точки p, диффеоморфная $2k$-мерному диску. Так как локально тривиальное расслоение над диском всегда тривиально, то $TV_1^{\omega} = \mathbb{R}^{2k} \times V_1$.

Ограничение формы ω даёт симплектическую форму в каждом слое расслоения $TV_1^{\omega} = \mathbb{R}^{2k} \times V_1$. Мы получаем отображение $f : V_1 \to \mathrm{GL}(2k)/\mathrm{Sp}(2k)$ в пространство симплектических форм. Так как расслоение $\mathrm{GL}(2k) \to \mathrm{GL}(2k)/\mathrm{Sp}(2k)$ локально тривиально, то по теореме о поднятии гомотопии мы получаем поднятие $\tilde{f} : V_1 \to \mathrm{GL}(2k)$ отображения f. Отображение $\tilde{f}$ и даёт выбор базиса Дарбу в каждой точке V_1.

16.3 Локальная изотопия

Пусть $L \subset M$ — лагранжево подмногообразие и $i_s : L \to M$ — семейство вложений, где $s \in [0,1]$, $i_0\big|^{L} = \mathrm{id}_L$. Тогда i_s продолжается в некоторой окрестности L до семейства симплектических вложений, как было показано в прошлой лекции. Перейдём к симплектическому случаю.

Теорема. *Пусть $P \subset (M, \omega)$ — замкнутое симплектическое подмногообразие, и $i_s : P \to M$ — семейство вложений, где $s \in [0,1]$, $i_0\big|^{P} = \mathrm{id}_P$ и $i_s(P)$ — симплектическое подмногообразие. Тогда найдутся окрестность $U \supset P$ и семейство вложений $j_s : U \to M$, такие что*

- $j_0\big|^{U} = \mathrm{id}_U$,
- $j_s(P) = i_s(P)$,
- j_s — *симплектоморфизм на образ.*

Теорема сразу следует из теоремы раздела 16.1, если

- показать, как заменить отображения i_s на такие отображения $j_s : P \to M$, что $i_s(P) = j_s(P)$ и j_s — симплектоморфизм на образ,
- построить семейство симплектоморфизмов расслоений $\chi_s : TP^{\omega} \to j_s^* T j_s(P)^{\omega}$.

Чтобы построить семейство $j_s : P \to M$, рассмотрим семейство форм $i_s^*\omega$ на P и применим трюк Мозера. Здесь мы используем компактность P и получаем такое семейство диффеоморфизмов φ_s, что $\varphi_s^* i_s^* \omega = \omega$. Тогда $j_s = i_s \circ \varphi_s$ — искомое семейство вложений.

Как известно, семейство вложений $j_s : P \to M$ можно продолжить до семейства диффеоморфизмов всего многообразия M с начальным тождественным диффеоморфизмом (например, можно рассмотреть соответствующие векторные поля и использовать разбиение единицы). В частности, мы имеем семейство изоморфизмов расслоений $\alpha_s : NP \to j_s^* N j_s(P)$, где $N\cdot$ обозначает нормальное расслоение и $\alpha_0 = \mathrm{id}$. Отождествляя естественным образом NP с TP^ω и $Nj_s(P)$ с $Tj_s(P)^\omega$, мы получаем семейство изоморфизмов расслоений $\beta_s : TP^\omega \to j_s^* T j_s(P)^\omega$, где $\beta_0 = \mathrm{id}$.

Теперь рассмотрим семейство форм $\beta_s^*\omega$ на TP^ω. По построению $\beta_0^*\omega = \omega$. Построим такое семейство изоморфизмов расслоений $A_s : TP^\omega \to TP^\omega$, что $A_s^* \beta_s^* \omega = \omega$. Тогда $\chi_s = \beta_s \circ A_s : TP^\omega \to j_s^* T j_s(P)^\omega$ будет искомым семейством симплектоморфизмов.

Упражнение. Пусть Ω_s — семейство вещественных невырожденных кососимметричных матриц, $s \in [0,1]$. Пусть $A_0 = \mathrm{id}$ и $\dot{A}_s = -\Omega_s^{-1}\dot{\Omega}_s A_s/2$. Тогда $A_s^T \Omega_s A_s = \Omega_0$.

Решая дифференциальное уравнение из упражнения в каждом слое расслоения TP^ω, получаем искомое семейство симплектоморфизмов A_s. Дифференциальное уравнение не зависит от базиса, так как член $\Omega_s^{-1}\dot{\Omega}_s$ есть не что иное, как поднятие индекса билинейной формы $\dot{\Omega}_s$ при помощи невырожденной билинейной формы Ω_s.

16.4 Изотопия

Гладкой изотопией многообразия M называется семейство диффеоморфизмов $\varphi_s : M \to M$, где параметр пробегает отрезок $s \in [0,1]$ и $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$. Назовём изотопию φ_s симплектического многообразия симплектической, если φ_s — симплектоморфизм для всех $s \in [0,1]$.

Пусть φ_s — симплектическая изотопия, и v_s — векторное поле, интегральные линии которого суть траектории $\varphi_s(p)$ для фиксированного p. Так как φ_s — симплектоморфизм для всех s, то производная Ли равна $0 = L_{v_s}\omega = d(i_{v_s}\omega)$. Мы получили замкнутую форму $i_{v_s}\omega$.

Упражнение. Покажите, что соответствие $v \mapsto i_v\omega$ определяет взаимно однозначное соответствие между симплектическими полями и замкнутыми 1-формами, а также между гамильтоновыми полями и точными 1-формами.

Пусть $N \subset M$ — лагранжево или симплектическое замкнутое подмногообразие и $i_s : N \to M$ — семейство таких вложений, что образ также является соответственно лагранжевым или симплектическим подмногообразием. Как мы уже знаем, это семейство вложений продолжается до семейства вложений некоторой окрестности, причём симплектоморфно на образ. Продолжается ли это семейство до симплектической изотопии всего многообразия M? Семейство вложений i_s определяет замкнутую 1-форму на N. Если 1-форма продолжается до замкнутой 1-формы на всём многообразии, то и семейство вложений продолжается до симплектической изотопии. Тем самым вопрос о существовании симплектической изотопии сводится к вопросу, какие первые классы когомологий N продолжаются до классов когомологий на всём многообразии.

Пример 5. Пусть α — кривая на поверхности, ограничивающая диск. Мы рассматриваем на поверхности некоторую форму площади, что превращает поверхность в симплектическое многообразие, а кривую — в лагранжево подмногообразие. Немного вдавим кривую α внутрь диска, который она ограничивает. Очевидно, что такое движение не продолжается до симплектической изотопии всей поверхности, потому что площадь, ограничиваемая кривой α, уменьшилась.

Пример 6. Пусть α — простая гладкая кривая на поверхости, не разбивающая поверхность. Тогда любое семейство вложений этой кривой, которое начинается с данного вложения, продолжается до симплектической изотопии поверхности, так как любую замкнутую 1-форму на этой кривой можно продолжить до 1-формы на всей поверхности.

Упражнение. Докажите аналоги теорем этой лекции для изотропных и коизотропных подмногообразий.