ТОРИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ.
ПРОГРАММА СПЕЦКУРСА И ЗАДАЧИ.

В. М. БУХШТАБЕР, А. А. ГАЙФУЛЛИН, Т. Е. ПАНОВ

1. Основные комбинаторные и геометрические понятия

1. Выпуклые многогранники.
2. Конусы и вееры.

Литература: [Б-П], [Fu].

2. Алгебраические торические многообразия

1. Общее определение, примеры.
2. Аффинные многообразия, соответствующие конусам.
3. Построение торических многообразий по веерам.
4. Пучки, дивизоры и 1-мерные расслоения на торических многообразиях.
5. Нормальные вееры и проективные многообразия.
6. Конструкция Батырева–Кокса торического многообразия как категорного/геометрического фактор-пространства.

Литература: [Б-П], [Да], [Fu], [Co95], [Co97].

3. Симплектические торические многообразия

1. Гамильтоновы действия тора, отображение моментов и симплектическая редукция.
2. Момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$: описание в виде пересечения вещественных квадрик.
3. Построение торических многообразий при помощи симплектической редукции.
4. Эквивалентность алгебраического (конструкция Кокса) и симплектического (симплектическая редукция) определений неособого проективного торического многообразия.
5. Пространство орбит торического многообразия для действия компактного тора. Локальная стандартность действия, многообразия с углами.

Литература: [Au], [Б-П], [Co95], [Co97].

4. Квазиторические многообразия

1. Определение и примеры. Понятие характеристической функции.
2. Различные виды эквивалентности квазиторических многообразий (эквивариантный гомеоморфизм, слабо эквивариантный гомеоморфизм, эквивалентность в смысле Дэвиса–Янушкевича). Восстановление квазиторического многообразия по характеристической функции.
3. Полиориентация и комбинаторные квазиторические пары (P,Λ).
4. Построение квазиторического многообразия $M(P,\Lambda)$ как факторпространства момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ по свободному действию торической подгруппы. Каноническая эквивариантная гладкая структура.
5. Теорема о стабильном разложении касательного расслоения квазиторического многообразия в сумму Уитни ориентируемых двумерных расслоений, соответствующих характеристическим подмногообразиям.
6. Эквивариантные стабильно комплексные структуры на квазиторических многообразиях. Понятие знака неподвижной точки.
7. Вычисление весов действия тора в касательных пространствах в неподвижным точках и знаков неподвижных точек для квазиторического многообразия $M(P,\Lambda)$ в терминах комбинаторных данных (P,Λ).

8. Соотношения Дена–Соммервилля. Вычисление размерностей групп гомологий квазиторических многообразий.
9. Структура кольца когомологий квазиторического многообразия.

Литература: [D-J], [Б-П], [B-P-R].

5. Задачи и упражнения

Звёздочкой (*) помечены более сложные задачи, решение которых выходит за рамки курса. Двумя звёздочками (**) помечены открытые вопросы и нерешённые проблемы.

1. Доказать, что любой комбинаторный симплициальный многогранник допускает выпуклую реализацию в виде многогранника с вершинами в точках целочисленной решётки. Доказать то же для простых многогранников.
2. Доказать, что любой n-мерный многогранник аффинно эквивалентен пересечению $\mathbb{R}^m_{\geqslant}$ с некоторой аффинной n-мерной плоскостью, где $m > n$.
3. Доказать, что полярное множество выпуклого многогранника является полиэдром (не обязательно ограниченным).
4. Доказать, что если многогранник P содержит 0 в своей внутренности, то $(P^*)^* = P$.
5. Доказать, что в размерностях $\geqslant 3$ многогранник, который является одновременно простым и симплициальным, есть симплекс.
6. Доказать, что если $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ является строго выпуклым многогранным конусом, то
$$\check{\sigma} = \{\boldsymbol{u} \in N^*_{\mathbb{R}} \colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}\rangle \geqslant 0 \ \text{ для всех } \ \boldsymbol{x} \in \sigma\}$$
также является выпуклым многогранным конусом. Доказать, что $\check{\sigma}$ является строго выпуклым тогда и только тогда, когда $\dim \sigma = \dim N_{\mathbb{R}}$.
7. * Привести пример полного неособого веера, который не является нормальным веером ни для какого многогранника.
8. Доказать, что полугрупповая алгебра $\mathbb{C}[S_\sigma]$ конечно порождена.
9. Доказать, что если τ — грань конуса σ, то соответствующее отображение аффинных торических многообразий $V_\tau \to V_\sigma$ является вложением открытого по Зарисскому подмножества.
10. Описать торическое многообразие, соответствующее 1-мерному вееру в $\mathbb{R}^2$, одномерные конусы которого порождены векторами $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $-\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$.
11. * Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим полный неособый веер в $\mathbb{R}^2$, имеющий 4 двумерных конуса, порождённых парами векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $(\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_2)$, $(-\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_2)$ и $(-\boldsymbol{e}_1 + k\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2)$. Доказать, что соответствующее торическое многообразие есть *поверхность Хирцебруха F_k*, т.е. комплексная проективизация $\mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{O}(k))$. Здесь $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное одномерное расслоение.
12. Доказать, что поверхности Хирцебруха F_k и $F_{k'}$ изоморфны как алгебраические многообразия (или как комплексные многообразия) тогда и только тогда, когда $k = \pm k'$.
13. * Доказать, что поверхность Хирцебруха F_k гомеоморфна $S^2 \times S^2$ при чётном k и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ при нечётном k (здесь $\overline{\mathbb{C}P}^2$ обозначает $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией).
14. * Доказать, что расслоение Хопфа над $\mathbb{C}P^n$ (одномерное тавтологическое расслоение, слоем которого над прямой является сама эта прямая) изоморфно расслоению $\mathcal{O}(-1)$.
15. * Доказать, что первый класс Чженя 1-мерного расслоения ξ над M совпадает с образом соответствующего класса когомологий при связывающем гомоморфизме
$$H^1(M; \mathcal{O}^*) \to H^2(M; \mathbb{Z})$$
из длинной когомологической последовательности для экспоненциальной последовательности пучков
$$0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0.$$
16. * Доказать утверждение предыдущей задачи с заменой пучка голоморфных функций $\mathcal{O}$ на пучок $\mathbb{C}$-значных гладких функций $\mathcal{A}$.
17. * Доказать, что $H^i(M; \mathcal{A}) = 0$ при $i > 0$ для любого гладкого многообразия M.
18. Вычислить $H^i(\mathbb{C}P^n; \mathcal{O})$.

19. Доказать, что аффинное торическое многообразие V_σ, соответствующее конусу σ, имеет единственную $T_{\mathbb{C}}$-неподвижную точку, если σ имеет полную размерность, и не имеет неподвижных точек иначе.
20. Доказать, что $T_{\mathbb{C}}$-неподвижные точки торического многообразия V_Σ соответствуют конусам полной размерности в веере Σ.
21. Доказать, что $T_{\mathbb{C}}$-инвариантные неприводимые подмногообразия коразмерности 1 в V_Σ соответствуют 1-мерным конусам в Σ.
22. Доказать, что $T_{\mathbb{C}}$-инвариантный дивизор Картье на аффинном торическом многообразии V_σ имеет вид $\operatorname{div}(\chi^u)$ для некоторого $u \in \check{\sigma} \cap N^*$.
23. * Привести пример простого многогранника, не допускающего целочисленной реализации с неособым нормальным веером.
24. ** Существует ли полный неособый веер Σ, для которого соответствующий симплициальный комплекс $\mathcal{K}_\Sigma$ не является комбинаторно эквивалентным границе выпуклого многогранника?
25. Пусть Σ — полный неособый веер, имеющий m одномерных конусов и хотя бы один конус полной размерности. Доказать, что в конструкции Батырева–Кокса действие подгруппы $G \subset (\mathbb{C}^\times)^m$ на пространстве $U(\Sigma)$ свободно.
26. Пусть $p\colon \mathcal{Z}_P \to P$ — проекция на пространство орбит момент-угол многообразия и $F \subset P$ — некоторая гипергрань. Описать многообразие $p^{-1}(F)$ в терминах $\mathcal{Z}_F$.
27. Описать момент-угол многообразия, соответствующие треугольнику и четырехугольнику.
28. * Дать явное топологическое описание момент-угол многообразия, соответствующего пятиугольнику.
29. Доказать, что два простых многогранника комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда они гомеоморфны как многообразия с углами.
30. ** Верно ли утверждение предыдущей задачи с заменой «гомеоморфны» на «диффеоморфны».
31. Является ли свободное действие тора T^n на многообразии M^{2n} локально стандартным?
32. Доказать, что действие компактного тора на неособом торическом многообразии локально стандартно.
33. Доказать, что расслоение Хопфа η над $\mathbb{C}P^1$ может быть получено как факторпространство произведения $S^3 \times \mathbb{C}$ по действию окружности S^1, заданному в координатах формулой
$$t \cdot (z_1, z_2, w) = (t^{-1}z_1, t^{-1}z_2, tw),$$
где $t \in S^1$, $(z_1, z_2) \in S^3$, $w \in \mathbb{C}$. Соответственно, каноническое расслоение $\bar{\eta} = \mathcal{O}(1)$ получается факторизацией произведения $S^3 \times \mathbb{C}$ по диагональному действию окружности. Как выглядит соответствующее действие окружности для расслоения Хопфа над $\mathbb{C}P^n$?
34. Доказать, что изоморфизм
$$\mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^{2(m-n)} \cong \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_m$$
в случае неособого проективного торического многообразия M становится изоморфизмом комплексных расслоений при отождествлении $\underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)} = \underline{\mathbb{C}}^{m-n}$.
35. Как изменяются веса и знаки неподвижных точек действия тора T^n на полиориентированном квазиторическом многообразии $M(P, \Lambda)$
    а) при изменении ориентации многогранника P на противоположную;
    б) при изменении i-го вектора-столбца матрицы $\mathcal{L}$ на противоположный?
36. Доказать, что многообразие Грассмана $G_{\mathbb{C}}(k, n)$ комплексных k-плоскостей в $\mathbb{C}^n$ не является (квази)торическим многообразием при $1 < k < n - 1$.
37. * Доказать, что гиперповерхность Милнора
$$H_{ij} = \{(z_0 : \ldots : z_i) \times (w_0 : \ldots : w_j) \in \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \colon z_0w_0 + \ldots + z_iw_i = 0\}$$
не являются (квази)торическими многообразиями при $1 < i \leqslant j$.
38. ** Существует ли неособое торическое многообразие, не являющееся квазиторическим? (Это эквивалентно вопросу из задачи 24.)

Список литературы

[Б-П] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* Издательство МЦНМО, Москва, 2004.

[Да] В. И. Данилов. *Геометрия торических многообразий.* Успехи мат. наук **33** (1978), вып. 2, 85–134.

[Ф-Ф] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. *Курс гомотопической топологии.* «Наука», Москва, 1989.

[Au] Michèle Audin. *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds.* Progress in Mathematics **93**. Birkhäuser, Basel, 1991.

[Br] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, New York-London, 1972. [Русский перевод: Г. Бредон. *Введение в теорию компактных групп преобразований.* «Наука», Москва, 1980.]

[B-P-R] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov and Nigel Ray. *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds.* Moscow Math. J. **7** (2007), no. 2; arXiv:math.AT/0609346.

[Co95] David A. Cox. *The homogeneous coordinate ring of a toric variety.* J. Algebraic Geom. **4** (1995), no. 1, 17–50; arXiv:alg-geom/9210008.

[Co97] David A. Cox. *Recent developments in toric geometry*, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995.* Proc. Sympos. Pure Math. **62**, Part 2. AMS, Providence, R.I., 1997, pp. 389–436; arXiv:alg-geom/9606016.

[D-J] Michael W. Davis and Tadeusz Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J., **62** (1991), no. 2, 417–451.

[Fu] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties.* Ann. of Math. Studies **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

E-mail address: `tpanov@mech.math.msu.su`